ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

TOME XXII

ANNÉE 1949

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA OŚWIATY
I PREZYDIUM RADY MINISTRÓW

KRAKÓW 1950
INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
UL. ŚW. JANA 22

Avis

Les tomes des Annales de la Société Polonaise de Mathématique paraissent en un ou en deux fascicules par an. Les manuscrits doivent être envoyés à l'une des adresses:

F. Leja, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.

T. Ważewski, Kraków (Pologne), ul. Starowiślna 77.

S. Gołąb, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.

Les auteurs ont le droit à 50 tirages à part gratuitement.

Pour ce qui concerne l'achat et l'échange de ces Annales s'adresser à:

Administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique
Kraków (Pologne), ul. św. Jana 22.

Les membres de la Société Polonaise de Mathématique ont le droit d'abonner le périodique américain »*Mathematical Reviews*« à un pris modéré de $ 6,50 par an.

Table des matières

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

TOME XXII

ANNÉE 1949

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA OŚWIATY
I PREZYDIUM RADY MINISTRÓW

KRAKÓW 1950
INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
UL. ŚW. JANA 22

PTM — 500 egz. — B. 5. pap. druk. sat. b/drzewny 70×100 cm 80 gr
II. 1950 — Zam. 49.

Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem P. Z. W. S.
M - 45092

SUR CERTAINES INÉGALITÉS ENTRE LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

Par J. Szarski (Kraków)

Introduction. Pour mettre en évidence le problème que je vais traiter, considérons d'abord une équation différentielle ordinaire de la forme:

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Supposons l'unicité des solutions de l'équation (1). On en déduit immédiatement que pour deux intégrales quelconques $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ vérifiant en un point x_0 l'inégalité:

$$\varphi_1(x_0) > \varphi_2(x_0), \tag{2}$$

on a:

$$\varphi_1(x) > \varphi_2(x) \tag{3}$$

partout où les deux intégrales existent.

Partant de cette remarque évidente M. Ważewski a posé le problème, si un effet analogue ne se présente, sous certaines hypothèses, pour les intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right). \tag{4}$$

D'une façon plus précise, il se pose la question de savoir sous quelles conditions relatives à la fonction f et à un ensemble E peut on affirmer que pour deux intégrales de l'équation (4) $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ et $v(x, y_1, \ldots, y_n)$ définies dans l'ensemble E, l'inégalité:

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) > v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \tag{5}$$

entre les valeurs initiales pour un x_0, entraîne l'inégalité:

(6) $$u(x, y_1, \ldots, y_n) > v(x, y_1, \ldots, y_n)$$

dans l'ensemble E tout entier?

Le but de ce travail et de montrer qu'en effet, sous certaines hypothèses, l'inégalité (5) entraîne l'inégalité (6) dans E tout entier et de généraliser les résultats obtenus pour les systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue de la forme:

(7) $$\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = f_\nu\left(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right), \quad (\nu = 1, \ldots, k)$$

et à plusieurs fonctions inconnues de la forme:

(8) $$\frac{\partial z_\nu}{\partial x} = f_\nu\left(x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial z_\nu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z_\nu}{\partial y_n}\right), \quad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Voici d'abord les théorèmes concernant le problème en question relatif à l'équation (4).

§ 1.

Théorème 1. Considérons l'équation (4) et l'ensemble défini par les inégalités:

(9) $$|x - \mathring{x}| < a; \quad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant a_i - M|x - \mathring{x}|, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

où

$$a > 0, \quad M > 0, \quad a_i > 0, \quad a < \frac{a_i}{M}.$$

Supposons que la fonction $f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ ainsi que ses dérivées du premier ordre par rapport aux variables $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$ soient continues dans un domaine D de l'espace à $2n+2$ dimensions, dont la projection sur le plan $x, y_1, \ldots, y_n$ recouvre l'ensemble (9). Supposons que les dérivées f_{y_i}, f_z, f_{q_j} remplissent dans D la condition de Lipschitz par rapport aux variables $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$ et qu'on ait l'inégalité:

(10) $$|f_{q_i}| < M, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Soient $u(x,y_1,\dots,y_n)$ et $v(x,y_1,\dots,y_n)$ deux intégrales de l'équation (4) définies et possédant la différentielle totales en tout point de l'ensemble (9) et vérifiant l'inégalité:

(11) $$u(\mathring{x}, y_1,\dots,y_n) > v(\mathring{x}, y_1,\dots,y_n),$$

et telles que leurs éléments de contact respectifs:

(12) $$x, y_1,\dots,y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial y_n},$$

(13) $$x, y_1,\dots,y_n, v, \frac{\partial v}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial v}{\partial y_n},$$

appartiennent au domaine D. Supposons enfin que les intégrales u et v soient formées des caractéristiques[1]).

Nous affirmons que, dans ces hypothèses, l'inégalité:

(14) $$u(x,y_1,\dots,y_n) > v(x,y_1,\dots,y_n),$$

est remplie dans l'ensemble (9) *tout entier.*

1. Nous démontrerons d'abord que, dans les hypothèses de notre théorème, l'inégalité (14) est remplie dans l'ensemble:

(15) $$\mathring{x} \leqslant x < \mathring{x} + a; \quad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant a_i - M(x - \mathring{x}), \quad (i=1,\dots,n).$$

---

[1]) Nous dirons qu'une intégrale $z(x,y_1,\dots,y_n)$ de l'équation (4) est formée des caractéristiques dans l'ensemble (9), lorsque pour tout point $(\tilde{x},\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_n)$ appartenant à (9) il existe une caractéristique:

(α) $$y_i = \hat{y}_i(x), \qquad z = \hat{z}(x), \qquad q_i = \hat{q}_i(x), \qquad (i=1,\dots,n)$$

de (4) c. à d. une intégrale du système:

(β) $$y_i' = -f_{q_i}; \qquad z' = f - \sum_{i=1}^{n} q_i f_{q_i}; \qquad q_i' = f_{y_i} + q_i f_z. \qquad (i=1,\dots,n)$$

passant par le point $\tilde{x}, \tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_n$, $z(\tilde{x},\tilde{y}_i)$, $z_{y_1}(\tilde{x},\tilde{y}_j),\dots,z_{y_n}(\tilde{x},\tilde{y}_j)$, telle que:

1⁰ la caractéristique (α) est définie dans l'intervalle $[\mathring{x},\tilde{x}]$.

2⁰ la courbe $y_i = \hat{y}_i(x)$, $(i=1,\dots,n)$, est contenue dans l'ensemble (9) pour $x \in [\mathring{x},\tilde{x}]$.

3⁰ $$\left.\begin{aligned} \hat{z}(x) &\equiv z(x, \hat{y}_1(x),\dots,\hat{y}_n(x)) \\ \hat{q}_i(x) &\equiv z_{y_i}(x, \hat{y}_1(x),\dots,\hat{y}_n(x)) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x \in [\mathring{x}, x].$$
$$i = 1,\dots,n.$$

A cet effet supposons, par impossible, que l'inégalité (14) ne soit pas vérifiée pour un point de l'ensemble (15). En vertu de l'inégalité (11) et de la continuité de u et de v, il existerait alors un point $\overline{P}(\overline{x},\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n)$, $(\overline{x}>\mathring{x})$, de l'ensemble (15) tel que:

(16) $$u(\overline{x},\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n)=v(\overline{x},\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n)$$

et

(17) $$u(x,y_1,\ldots,y_n)>v(x,y_1,\ldots,y_n)$$

pour tout point de l'ensemble:

(18) $$\mathring{x}\leqslant x\leqslant\overline{x};\quad |y_i-\mathring{y}|\leqslant a_i-M(x-\mathring{x}),\quad (i=1,\ldots,n).$$

Nous allons distinguer maintenant deux cas possibles:

Cas 1-mier. Le point $\overline{P}(\overline{x},\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n)$ appartient à l'intérieur de l'ensemble (15). En ce cas la différence:

(19) $$u(\overline{x},y_1,\ldots,y_n)-v(\overline{x},y_1,\ldots,y_n)$$

envisagée comme fonction à n variables $y_1,\ldots,y_n$ possède, en vertu de (16) et de (17), un minimum au point intérieur $\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n$. Nous avons par conséquent:

(20) $$\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)_{\overline{P}}=\left(\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)_{\overline{P}}\qquad (i=1,\ldots,n).$$

Soient:

(21) $$y_i=\overset{1}{y}_i(x),\quad (i=1,\ldots,n);\quad z=\overset{1}{z}(x),\quad q_i=\overset{1}{q}_i(x),\quad (i=1,\ldots,n)$$

et

(22) $$y_i=\overset{2}{y}_i(x),\quad (i=1,\ldots,n);\quad z=\overset{2}{z}(x),\quad q_i=\overset{2}{q}_i(x),\quad (i=1,\ldots,n)$$

deux caractéristiques de l'équation (4) passant respectivement par les points:

(23) $$\overline{x},\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n,(u)_{\overline{P}},\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\right)_{\overline{P}},\ldots,\left(\frac{\partial u}{\partial y_n}\right)_{\overline{P}},$$

(24) $$\overline{x},\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n,(v)_{\overline{P}},\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right)_{\overline{P}},\ldots,\left(\frac{\partial v}{\partial y_n}\right)_{\overline{P}}.$$

D'après nos hypothèses (cf. [1])) ces caractéristiques sont définies pour $x \in [\mathring{x}, \overline{x}]$ et on a:

$$\begin{aligned} &(25) \qquad \overset{1}{z}(x) = u(x, \overset{1}{y}_1(x), \ldots, \overset{1}{y}(x)) \\ &(26) \qquad \overset{2}{z}(x) = v(x, \overset{2}{y}_1(x), \ldots, \overset{2}{y}(x)) \end{aligned} \qquad \text{pour} \quad x \in [\mathring{x}, \overline{x}].$$

D'autre part, les points (23) et (24) étant, d'après (16) et (20), identiques, on en conclut que les caractéristiques (21) et (22) le sont aussi, puisque dans nos hypothèses, la conditions d'unicité des solutions du système (β), (cf. [1])), est vérifiée. On a donc en particulier:

$$(27) \quad \overset{1}{y}_i(x) = \overset{2}{y}_i(x), \quad (i = 1, \ldots, n); \quad \overset{1}{z}(x) = \overset{2}{z}(x), \quad \text{pour} \quad x \in [\mathring{x}, \overline{x}]$$

d'où il résulte, d'après (25) et (26), que:

$$(28) \qquad u(x, \overset{1}{y}_1(x), \ldots, \overset{1}{y}_n(x)) = v(x, \overset{1}{y}_1(x), \ldots, \overset{1}{y}_n(x)) \quad \text{pour} \quad x \in [\mathring{x}, \overline{x}],$$

et en particulier:

$$(29) \qquad u(\mathring{x}, \overset{1}{y}_1(\mathring{x}), \ldots, \overset{1}{y}_n(\mathring{x})) = v(\mathring{x}, \overset{1}{y}_1(\mathring{x}), \ldots, \overset{1}{y}_n(\mathring{x}))$$

ce qui contredit à l'inégalité (11).

Cas 2-ième. Le point $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ appartient à la frontière de l'ensemble (15). Le point $\overline{P}$ est donc situé sur un nombre fini r ($r \geqslant 0$) d'entre les plans:

$$(30) \qquad y_i - \mathring{y}_i = a_i - M(x - \mathring{x}), \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

et sur un nombre fini s ($s \geqslant 0$) d'entre les plans:

$$(31) \qquad y_j - \mathring{y}_j = -a_j + M(x - \mathring{x}), \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

la somme $r + s$ vérifiant l'inégalité $1 \leqslant r + s \leqslant n$, puisque deux plans (30) et (31) correspondant au même indice n'ont pas de points communs pour $\mathring{x} \leqslant x < \mathring{x} + a$. Supposons que les plans dont le point $\overline{P}$ fasse partie soient ceux d'indices $i_1, \ldots, i_r$ et $j_1, \ldots, j_s$. D'après ce que nous venons de constater on a:

$$(32) \qquad i_\alpha \neq j_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, r; \quad \beta = 1, \ldots, s).$$

Selon notre hypothèse les coordonnées du point $\overline{P}(\overline{x},\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_n)$ vérifient les relations suivantes:

$$(33)\qquad \overline{y}_{i_\alpha}-\mathring{y}_{i_\alpha}=a_{i_\alpha}-M(\overline{x}-\mathring{x});\quad \overline{y}_i-\mathring{y}_i<a_i-M(\overline{x}-\mathring{x})$$
$$\alpha=1,\dots,r \qquad\qquad i\neq i_\alpha$$

$$(34)\qquad \overline{y}_{j_\beta}-\mathring{y}_{j_\beta}=-a_{j_\beta}+M(\overline{x}-\mathring{x});\quad \overline{y}_j-\mathring{y}_j>-a_j+M(\overline{x}-\mathring{x}).$$
$$\beta=1,\dots,s \qquad\qquad j\neq j_\beta.$$

Nous allons démontrer maintenant qu'on a les relations suivantes:

$$(35)\qquad \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial y_{i_\alpha}}\right]_{\overline{P}}\leqslant 0, \qquad (\alpha=1,\dots,r),$$

$$(36)\qquad \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial y_{j_\beta}}\right]_{\overline{P}}\geqslant 0, \qquad (\beta=1,\dots,s),$$

$$(37)\qquad \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial y_l}\right]_{\overline{P}}=0, \qquad l\neq i_\alpha,\quad l\neq j_\beta.$$

Or, d'après (32), (33) et (34), le point:

$$(38)\qquad \overline{x},\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_{i_\alpha-1},\quad y_{i_\alpha},\overline{y}_{i_\alpha+1},\dots,\overline{y}_n$$

remplit les inégalités définissant l'ensemble (18) et par conséquent en fait partie pourvu que y_{i_α} soit suffisamment voisin de $\overline{y}_{i_\alpha}$ et satisfasse à l'inégalité $y_{i_\alpha}<\overline{y}_{i_\alpha}$. Pour une telle valeur de y_{i_α} nous avons donc, d'après (16) et (17):

$$(39)\qquad \frac{u(\overline{x},\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_{i_\alpha-1},y_{i_\alpha},\overline{y}_{i_\alpha+1},\dots,\overline{y}_n)-u(\overline{x},\overline{y}_j)}{y_{i_\alpha}-\overline{y}_{i_\alpha}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{v(\overline{x},\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_{i_\alpha-1},y_{i_\alpha},\overline{y}_{i_\alpha+1},\dots,\overline{y}_n)-v(\overline{x},\overline{y}_j)}{y_{i_\alpha}-\overline{y}_{i_\alpha}}$$

d'où, en faisant tendre y_{i_α} vers $\overline{y}_{i_\alpha}$, nous obtenons à la limite l'inégalité (35). D'une façon analogue nous démontrons l'inégalité (36).

Considérons maintenant, pour $l \neq i_\alpha$ et $l \neq j_\beta$, le point:

(40) $$\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{l-1}, y_l, \overline{y}_{l+1}, \ldots, \overline{y}_n.$$

D'après (33) et (34), ce point appartient à l'ensemble (18), pourvu que y_l soit suffisamment voisin de $\overline{y}_l$. Il en résulte d'après (16) et (17), que la différence:

(41) $$u(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{l-1}, y_l, \overline{y}_{l+1}, \ldots, \overline{y}_n) - v(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{l-1}, y_l, \overline{y}_{l+1}, \ldots, \overline{y}_n)$$

considérée comme fonction à une variable y_l possède au point intérieur $\overline{y}_l$ un minimum et par conséquent on a (37).

Posons pour abréger:

(42) $$\left[\left|\frac{\partial(u-v)}{\partial y_j}\right|\right]_{\overline{P}} = \lambda_j, \qquad (j=1,\ldots,n).$$

D'après (35), (36) et (37) nous avons:

(43) $$\lambda_{i_\alpha} \geqslant 0, \quad (\alpha=1,\ldots,r); \quad \lambda_{j_\beta} \geqslant 0, \quad (\beta=1,\ldots,s)$$

(44) $$\lambda_l = 0 \quad \text{pour} \quad l \neq i_\alpha, \quad l \neq j_\beta$$

(45) $$\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial y_j}\right]_{\overline{P}} = \varepsilon_j \lambda_j, \qquad (j=1,\ldots,n)$$

où:

(46) $$\varepsilon_{i_\alpha} = -1, \qquad (\alpha=1,\ldots,r)$$

(47) $$\varepsilon_j = 1, \qquad j \neq i_\alpha.$$

Si l'on avait $\lambda_j = 0$, $(j=1,\ldots,n)$, alors les égalités (20) seraient remplies et nous aboutirions à une contradiction comme dans le cas 1-mier. Supposons donc qu'on ait:

(48) $$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j > 0.$$

En vertu des inégalités (10) nous avons l'implication suivante:

$$\text{lorsque} \quad \sum_{j=1}^{n} |q_j - \overline{q}_j| > 0, \quad \text{alors}$$

(49) $$|f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n) - f(x, y_1, \ldots, y_n, z, \overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_n)| < \\ < M \sum_{j=1}^{n} |q_j - \overline{q}_j|.$$

Les fonctions u et v étant, par hypothèse, deux intégrales de l'équation (4) il résulte, d'après (16), que:

$$\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\right]_{\overline{P}} = \left[f\left(x, y_j, u, \frac{\partial u}{\partial y_j}\right) - f\left(x, y_j, u, \frac{\partial u}{\partial y_j} - \frac{\partial(u-v)}{\partial y_j}\right)\right]_{\overline{P}}, \tag{50}$$

où encore, en vertu de (45):

$$\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\right]_{\overline{P}} = \left[f\left(x, y_j, u, \frac{\partial u}{\partial y_j}\right) - f\left(x, y_j, u, \frac{\partial u}{\partial y_j} - \varepsilon_j \lambda_j\right)\right]_{\overline{P}}. \tag{51}$$

D'autre part il s'ensuit de (46), (47) et (48) que:

$$\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j \lambda_j| > 0, \tag{52}$$

et par conséquent on a, selon l'implication (49), l'inégalité suivante:

$$\left[f\left(x, y_j, u, \frac{\partial u}{\partial y_j}\right) - f\left(x, y_j, u, \frac{\partial u}{\partial y_j} - \varepsilon_j \lambda_j\right)\right]_{\overline{P}} > -M \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j \lambda_j|. \tag{53}$$

En rapprochant les relations (43), (44), (46), (47), (51) et (53) nous obtenons enfin l'inégalité:

$$\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\right]_{\overline{P}} > -M\left(\sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_{i_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} \lambda_{j_\beta}\right). \tag{54}$$

Posons maintenant:

$$\begin{gathered} y_{i_\alpha}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathring{y}_{i_\alpha} + a_{i_\alpha} - M(t - \mathring{x}); \\ \alpha = 1, \ldots, r, \\ y_{j_\beta}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathring{y}_{j_\beta} - a_{j_\beta} + M(t - \mathring{x}); \quad y_l(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \overline{y}_l \\ \beta = 1, \ldots, s \qquad\qquad l \neq i_\alpha \\ l \neq j_\beta \end{gathered} \tag{55}$$

et considérons la droite:

$$x = t, \quad y_j = y_j(t), \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{56}$$

En vertu de (33) et (34) nous avons:

$$y_j(\overline{x}) = \overline{y}_j, \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{57}$$

La droite (56) est évidemment située dans l'ensemble (18) pour $\mathring{x} \leqslant t < \bar{x}$. Pour une telle valeur de t nous avons, d'après (16) et (17) l'inégalité:

$$(58) \qquad \frac{u(t, y_j(t)) - u(\bar{x}, \bar{y}_j)}{t - \bar{x}} \leqslant \frac{v(t, y_j(t)) - v(\bar{x}, \bar{y}_j)}{t - \bar{x}}$$

d'où, en faisant tendre t vers $\bar{x}$, nous obtenons à la limite:

$$(59) \qquad \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\right]_{\bar{P}} \leqslant -\sum_{j=1}^{n} y'_j(\bar{x}) \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial y_j}\right]_{\bar{P}}.$$

D'autre part, comme il résulte de (55), nous avons:

$$(60) \qquad \begin{array}{lll} y'_{i_\alpha}(t) = -M; & y'_{j_\beta}(t) = M; & y'_l(t) = 0. \\ \alpha = 1, \dots, r & \beta = 1, \dots, s & l \neq i_\alpha \\ & & l \neq j_\beta \end{array}$$

En tenant compte de (45) nous pouvons donc écrire l'inégalité (59) en forme:

$$(61) \qquad \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\right]_{\bar{P}} \leqslant M \Big(\sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_{i_\alpha} \lambda_{i_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{s} \varepsilon_{j_\beta} \lambda_{j_\beta}\Big)$$

ou encore, d'après (46) et (47):

$$(62) \qquad \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\right]_{\bar{P}} \leqslant -M \Big(\sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_{i_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} \lambda_{j_\beta}\Big)$$

ce qui contredit à (54).

Puisque dans tous les deux cas nous aboutissons à une contradiction, il en résulte que l'inégalité (14) est remplie dans l'ensemble (15) tout entier.

2. Il nous reste encore à démontrer que l'inégalité (14) est aussi remplie dans l'ensemble:

$$(63) \qquad -a + \mathring{x} < x \leqslant \mathring{x}; \quad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant a_i - M(\mathring{x} - x), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Posons à cet effet:

$$(64) \quad U(x, y_1, \dots, y_n) \overset{\mathrm{df}}{=} u(-x, y_1, \dots, y_n), \ V(x, y_1, \dots, y_n) \overset{\mathrm{df}}{=} v(-x, y_1, \dots, y_n)$$

pour $(x, y_1, \dots, y_n)$ appartenant à l'ensemble:

$$(65) \quad -\mathring{x} \leqslant x < -\mathring{x} + a; \quad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant a_i - M(x - (-\mathring{x})), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Puisque, selon notre hypothèse, les fonctions u et v sont deux intégrales de l'équation (4) formées des caractéristiques dans l'ensemble (63), les fonctions U et V sont évidemment deux intégrales formés des caractéristiques dans l'ensemble (65) de l'équation:

$$(66) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = F\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right)$$

où:

$$(67) \quad F(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n) \stackrel{\mathrm{df}}{=} -f(-x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n).$$

D'après (11) et (64) nous avons:

$$(68) \qquad U(-\mathring{x}, y_1, \ldots, y_n) > V(-\mathring{x}, y_1, \ldots, y_n).$$

On vérifie sans difficulté que la fonction F satisfait aux hypothèses de notre théorème supposées pour la fonction f. En vertu de la première partie de la démonstration nous avons, par conséquent:

$$(69) \qquad U(x, y_1, \ldots, y_n) > V(x, y_1, \ldots, y_n)$$

dans l'ensemble (65), donc, d'après (64):

$$(70) \qquad u(-x, y_1, \ldots, y_n) > v(-x, y_1, \ldots, y_n)$$

dans l'ensemble (65). Il en résulte que l'inégalité (14) est remplie dans l'ensemble (63).

Théorème 1 bis. Supposons que la fonction

$$f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$$

remplisse les hypothèses du théorème 1 dans un domaine D de l'espace à $2n+2$ dimensions, dont la projection sur le plan $x, y_1, \ldots, y_n$ recouvre l'ensemble:

$$(71) \qquad |x - \mathring{x}| < a; \quad y_1, \ldots, y_n \text{ arbitraires.}$$

Soient $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ et $v(x, y_1, \ldots, y_n)$ deux intégrales de l'équation (4) définies, possédant la différentielles totales et formées des caractéristiques dans l'ensemble (71). Supposons enfin que les fonctions u et v satisfaissent à l'inégalité (11) et que leurs éléments de contact (12) et (13) appartienent au domaine D.

Nous affirmons que, dans ces hypothèses, l'inégalité (14) *est remplie dans l'ensemble* (71) *tout entier.*

Démonstration. Soit $\mathring{P}(\mathring{x},\mathring{y}_1,\ldots,\mathring{y}_n)$ un point quelconque de l'ensemble (71). Le point $\mathring{P}$ appartient à l'ensemble:

$$(72)\qquad |x-\mathring{x}|<a;\quad |y_i|\leqslant b-M|x-\mathring{x}|,\qquad (i=1,\ldots,n)$$

pourvu que $b>0$ soit un nombre suffisemment grand. En vertu du théorème 1, l'inégalité (14) est vérifiée dans l'ensemble (72), nous avons donc en particulier:

$$(73)\qquad u(\mathring{x},\mathring{y}_1,\ldots,\mathring{y}_n)>v(\mathring{x},\mathring{y}_1,\ldots,\mathring{y}_n).$$

Le point $\mathring{P}$ étant un point quelconque de l'ensemble (71), le théorème 1 bis se trouve ainsi démontré.

Remarque 1. Les intégrales u et v figurant dans le théorème 1. sont formées des caractéristiques dans l'ensemble (9), lorsqu'on suppose, par exemple, qu'elles soient de classe C^2 dans l'ensemble (9). On peut le démontrer de la façon suivante. Soit $z(x,y_1,\ldots,y_n)$ une intégrale de l'équation (4), de classe C^2 dans l'ensemble (9) et considérons le système d'équations différentielles ordinaires:

$$(74)\qquad y_i'=-f_{q_i}(x,y_1,\ldots,y_n,z,z_{y_1},\ldots,z_{y_n}),\qquad (i=1,\ldots,n).$$

Soit $\tilde{P}(\tilde{x},\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ un point quelconque de l'ensemble (9). Nous supposerons que $\tilde{x}>\mathring{x}$, le cas $\tilde{x}<\mathring{x}$ se laissant traîter d'une façon analogue. Désignons par:

$$(75)\qquad y_i=\hat{y}_i(x),\qquad (i=1,\ldots,n)$$

l'intégrale du système (74) passant par le point $\tilde{P}$. Nous allons démontrer que l'intégrale (75) existe dans l'intervalle $[\mathring{x},\tilde{x}]$ et est située dans l'ensemble (9).

Or, d'après (10) et (74), nous avons les inégalités:

$$(76)\qquad -M<\hat{y}_i'(x)<M,\qquad (i=1,\ldots,n)$$

partout où l'intégrale (75) existe. Posons pour abréger:

$$(77)\qquad \varphi_i(x)\overset{\mathrm{df}}{=}a_i-M(x-\mathring{x})+\mathring{y}_i,\qquad (i=1,\ldots,n).$$

En vertu de (76) on a les inégalités:

$$\varphi_i'(x) < \hat{y}_i'(x), \qquad (i=1,\dots,n). \tag{78}$$

D'autre par, le point $\tilde{P}$ appartenant à l'ensemble (9), nous avons les inégalités:

$$\hat{y}_i(\tilde{x}) \leq \mathring{y}_i + a_i - M(\tilde{x} - \mathring{x}) = \varphi_i(\tilde{x}), \qquad (i=1,\dots,n). \tag{79}$$

Il résulte [2]) de (78) et (79) que:

$$\varphi_i(x) > \hat{y}_i(x), \qquad (i=1,\dots,n) \tag{80}$$

ou ce qui revient au même:

$$\mathring{y}_i + a_i - M(x - \mathring{x}) > \hat{y}_i(x), \qquad (i=1,\dots,n) \tag{81}$$

pour tout $x < \tilde{x}$ pour lequel l'intégrale (75) existe.

On démontre d'une façon analogue que pour les mêmes valeurs de x on a:

$$\mathring{y}_i - a_i + M(x - \mathring{x}) < \hat{y}_i(x), \qquad (i=1,\dots,n). \tag{82}$$

Mais l'intégrale (75) se laissant prolonger [3]) vers la gauche jusqu'à la frontière de l'ensemble (9), il résulte de (81) et (82) que cette intégrale existe dans l'intervalle $[\mathring{x}, \tilde{x}]$ et est située dans l'ensemble (9).

Considérons maintenant la courbe:

$$\begin{gathered} y_i = \hat{y}_i(x); \quad z = z(x, \hat{y}_1(x), \dots, \hat{y}_n(x)); \\ q_i = z_{y_i}(x, \hat{y}_1(x), \dots, \hat{y}_n(x)), \end{gathered} \qquad (i=1,\dots,n). \tag{83}$$

Cette courbe définie dans l'intervalle $[\mathring{x}, \tilde{x}]$ est, dans nos hypothèses [4]), la caractéristique de l'équation (4) passant par le point:

$$\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n, \quad z(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n), \quad z_{y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dots, \tilde{y}_n), \dots, z_{y_n}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n). \tag{84}$$

Notre proposition est ainsi démontrée.

---

[2]) E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930, p. 82, Satz 1.

[3]) E. Kamke, cf. loc. cit. p. 135, Satz 2.

[4]) E. Kamke, cf. loc. cit. p. 351, Satz 2.

Remarque 2. Le fait essentiel du théorème 1 et 1 bis réside en ce que l'ensemble (9) respectivement l'ensemble (71), dans lequel l'inégalité (14) est vérifiée, ne dépend point de la forme particulière de la fonction f satisfaisant aux hypothèses du théorème.

§ 2.

Nous allons donner maintenant deux applications du théorème 1 et du théorème 1 bis dans le cas, où certaines hypothèses supplémentaires sur la fonction $f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ permettent de faire usage des théorèmes d'existence. Nous montreront notamment que sous certaines hypothèses l'inégalité faible:

$$u(\mathring{x}, y_1, \ldots, y_n) \geqslant v(\mathring{x}, y_1, \ldots, y_n) \tag{85}$$

remplie par deux intégrales de l'équation (4) entraîne l'inégalité:

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \geqslant v(x, y_1, \ldots, y_n), \tag{86}$$

dans un ensemble de la forme (9) respectivement de la forme (71).

1. Nous introduirons d'abord des hypothèses suivantes:

Hypothèses H_1. Supposons que la fonction

$$f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$$

ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre relatives aux variables $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$ soient continues dans le cube:

$$|x - \mathring{x}| \leqslant C; \quad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant C; \quad |z - \mathring{z}| \leqslant C; \quad |q_i - \mathring{q}_i| \leqslant C, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{87}$$

et remplissent les inégalités:

$$\left.\begin{array}{c} |f| \\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial y_i}\right|, \left|\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|, \left|\dfrac{\partial f}{\partial q_i}\right| \\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial z}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial q_j}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial q_i}\right| \end{array}\right| < M. \tag{88}$$

Soit $\omega(y_1,\ldots,y_n)$ une fonction de classe C^2 pour $(y_1,\ldots,y_n)$ appartenant au cube:

(89) $$|y_i - \mathring{y}_i| \leqslant C, \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Supposons enfin qu'on ait les inégalités:

(90) $$|\mathring{q}_i| < M, \qquad (i=1,\ldots,n)$$

(91) $$\left|\frac{\partial\omega}{\partial y_i}\right|, \left|\frac{\partial^2\omega}{\partial y_i \partial y_j}\right| < M$$

(92) $$|\omega(\mathring{y}_1,\ldots,\mathring{y}_n) - \mathring{z}| < \frac{C}{4}; \quad |\omega_{y_i}(\mathring{y}_1,\ldots,\mathring{y}_n) - \mathring{q}_i| < \frac{C}{4}, \ (i=1,\ldots,n).$$

Remarque 3. Dans ces hypothèses il existe [5]) une intégrale unique $\varphi(x,y_1,\ldots,y_n)$ de l'équation (4) définie et de classe C^1 dans l'ensemble:

(93) $$|x-\mathring{x}| < \delta; \quad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant \frac{C}{4n(M+1)} - M|x-\mathring{x}|, \ (i=1,\ldots,n)$$

où:

(94) $$\delta = \frac{C^2}{[(n+1)(M+C+1)]^5}$$

telle que:

(95) $$\varphi(\mathring{x},y_1,\ldots,y_n) \equiv \omega(y_1,\ldots,y_n)$$

dans le cube:

(96) $$|y_i - \mathring{y}_i| \leqslant \frac{C}{4n(M+1)}.$$

L'intégrale $\varphi(x,y_1,\ldots,y_n)$ jouit en plus des propriétés suivantes:

(a) $\varphi(x,y_1,\ldots,y_n)$ est fomée de caractéristiques dans l'ensemble (93).

(β) [6]) Lorsque la fonction $\omega(y_1,\ldots,y_n,\lambda)$ satisfait aux hypothèses H_1 pour toute valeur du paramètre λ variant dans un intervalle Δ et en dépend continûment, alors l'intégrale correspondante φ est une fonction continue par rapport à λ.

---

[5]) T. Ważewski, *Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*. Ann. Soc. Pol. Mat. t. XIV, 1935.

[6]) La propriété (β) n'et pas formulée dans le travail cité, mais elle en résulte facilement.

Théorème 2. Supposons que les hypothèses H_1 soient remplies pour la fonction $f(x, y_1, \dots, y_n, z, q_1, \dots, q_n)$ et les fonctions $\omega^{(1)}(y_1, \dots, y_n)$, $\omega^{(2)}(y_1, \dots, y_n)$ dans le cube (87). Désignons par $\varphi^{(1)}(x, y_1, \dots, y_n)$ et $\varphi^{(2)}(x, y_1, \dots, y_n)$ les intégrales uniques de l'équation (4) définies et de classe C^1 dans l'ensemble (93) et telles que:

(97) $$\varphi^{(1)}(\mathring{x}, y_1, \dots, y_n) \equiv \omega^{(1)}(y_1, \dots, y_n),$$

(98) $$\varphi^{(2)}(\mathring{x}, y_1, \dots, y_n) \equiv \omega^{(2)}(y_1, \dots, y_n).$$

Dans ces hypothèses, lorsque l'inégalité:

(99) $$\omega^{(1)}(y_1, \dots, y_n) > \omega^{(2)}(y_1, \dots, y_n)$$

est remplie dans le cube (96), *alors l'inégalité*:

(100) $$\varphi^{(1)}(x, y_1, \dots, y_n) > \varphi^{(2)}(x, y_1, \dots, y_n)$$

est vérifiée dans l'ensemble (93) *tout entier.*

Ce théorème découle immédiatement du théorème 1 et de la propriété (a).

Théorème 3. *Dans les hypothèses du théorème* 2, *lorsque l'inégalité*:

(101) $$\omega^{(1)}(y_1, \dots, y_n) \geqslant \omega^{(2)}(y_1, \dots, y_n)$$

est remplie dans le cube (96), *alors l'inégalité*:

(102) $$\varphi^{(1)}(x, y_1, \dots, y_n) \geqslant \varphi^{(2)}(x, y_1, \dots, y_n)$$

est vérifiée dans l'ensemble (93) *tout entier.*

Démonstration. Posons:

(103) $$\omega(y_1, \dots, y_n, \lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} \omega^{(1)}(y_1, \dots, y_n) + \lambda.$$

Pour λ suffisamment petit et positif la fonction $\omega(y_1, \dots, y_n, \lambda)$ satisfait aux hypothèses H_1 et on a, d'après (101) et (103):

(104) $$\omega(y_1, \dots, y_n, \lambda) > \omega^{(2)}(y_1, \dots, y_n)$$

dans le cube (96). Désignons par $\varphi(x,y_1,\ldots,y_n,\lambda)$ l'intégrale de l'équation (4) remplissant l'identité:

$$\varphi(\mathring{x},y_1,\ldots,y_n,\lambda)\equiv\omega(y_1,\ldots,y_n,\lambda).$$

En vertu du théorème 2 nous avons alors:

$$\varphi(x,y_1,\ldots,y_n,\lambda)>\varphi^{(2)}(x,y_1,\ldots,y_n). \tag{105}$$

En faisant tendre λ vers 0 nous obtenons à la limite, d'après la propriété (β) et (105), l'inégalité:

$$\varphi(x,y_1,\ldots,y_n,0)\geqslant\varphi^{(2)}(x,y_1,\ldots,y_n) \tag{106}$$

dans l'ensemble (93) tout entier.

D'autre part, puisque:

$$\varphi(\mathring{x},y_1,\ldots,y_n,0)=\omega(y_1,\ldots,y_n,0)=\omega^{(1)}(y_1,\ldots,y_n) \tag{107}$$

il résulte de l'unicité des intégrales de l'équation (4), que:

$$\varphi(x,y_1,\ldots,y_n,0)\equiv\varphi^{(1)}(x,y_1,\ldots,y_n) \tag{108}$$

dans l'ensemble (93), ce qui termine la démonstration.

2. Introduisons à présent des hypothèses suivantes:

Hypothèses H_2. Supposons que la fonction

$$f(x,y_1,\ldots,y_n,z,q_1,\ldots q_n)$$

ainsi que ses dérivées du premier et du second ordre relatives aux variables $y_1,\ldots,y_n,z,q_1,\ldots,q_n$ soient continues dans l'ensemble:

$$|x-\mathring{x}|<a;\quad y_1,\ldots,y_n,z,q_1,\ldots,q_n \quad \text{arbitraires} \tag{109}$$

et remplissent les inégalités (88).

Soit $\omega(y_1,\ldots,y_n)$ une fonction de classe C^2 pour $y_1,\ldots,y_n$ arbitraires, remplissant les inégalités:

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial y_i}\right|+\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2\omega}{\partial y_i\partial y_j}\right|\leqslant B\,,\qquad (i=1,\ldots,n). \tag{110}$$

Soit enfin:

$$0<\beta<\frac{1}{M}\ln\left(1+\frac{\ln 3}{2n(B+1)}\right);\qquad \alpha=\min\,(a,\beta). \tag{111}$$

Remarque 4. Dans ces hypothèses, il existe [7]) une intégrale unique $\varphi(x,y_1,...,y_n)$ de l'équation (4) définie et de classe C^1 dans l'ensemble:

$$|x-\overset{\circ}{x}|<a; \quad y_1,...,y_n \quad \text{arbitraires} \tag{113}$$

telle que:

$$\varphi(\overset{\circ}{x},y_1,...,y_n) \equiv \omega(y_1,...,y_n). \tag{114}$$

Cette intégrale jouit en plus des propriétés (α) et (β) (cf. remarque 3), lorsqu'on remplace H_1 par H_2.

Théorème 2 bis. Supposons que les hypothèses H_2 soient remplies pour la fonction $f(x,y_1,...,y_n,z,q_1,...,\varphi_n)$ et les fonctions $\omega^{(1)}(y_1,...,y_n)$ et $\omega^{(2)}(y_1,...,y_n)$. Désignons par $\varphi^{(1)}(x,y,...,y_n)$ et $\varphi^{(2)}(x,y_1,...,y_n)$ les intégrales uniques de l'équation (4) définies et de classe C^1 dans l'ensemble (113) et vérifiant les identités (97) et (98) pour $y_1,...,y_n$ arbitraires.

Dans ces hypothèses, lorsque l'inégalité (99) *est remplie pour* $y_1,...,y_n$ *arbitraires, alors l'inégalité* (100) *est vérifiée dans l'ensemble* (113) *tout entier.*

Ce théorème découle immédiatement du théorème 1 bis et de la propriété (α).

Théorème 3 bis. *Dans les hypothèses du théorème 2 bis, lorsque l'inégalité* (101) *est remplie pour* $y_1,...,y_n$ *arbitraires, alors l'inégalité* (102) *est vérifiée dans l'ensemble* (113).

On le démontre tout comme le théorème 3.

Remarque 5. Le fait essentiel des théorèmes 2, 3, 2 bis et 3 bis consiste en ce que l'ensemble (93) respectivement (113) dans lequel les inégalités (100) et (101) sont remplies ne dépend pas de la forme particulière des fonctions f, $\omega^{(1)}$ et $\omega^{(2)}$.

3. Un exemple. Nous allons donner un exemple de l'équation (4) pour laquelle deux intégrales satisfaisant aux hypothèses du théorème 1 dans un ensemble de la forme (9) ne vérifient pas l'inégalité (14) en un certain point situé hors

[7]) E. Kamke, *Bemerkungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*. Math. Zeitschrift, Band 49, Heft 2.

de l'ensemble (9), bien qu'au voisinage de ce point elles soient formées des caractéristiques issues des points de l'ensemble:

$$x = \overset{\circ}{x}; \quad |y_i - \overset{\circ}{y}_i| \leqslant a_i, \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{115}$$

Cet exemple mettra en évidence le fait qu'en général deux intégrales de l'équation (4) vérifiant les hypothèses du théorème 1, peuvent s'entrecroiser en dehors de l'ensemble (9).

Considérons l'équation à deux variables indépendantes:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \tag{116}$$

ou bien en forme abrégée:

$$p = q^2. \tag{117}$$

Dans notre cas nous avons $f(x, y, z, q) \equiv q^2$. Dans l'ensemble:

$$|x| < \tfrac{1}{4}; \quad |y| \leqslant 7 - 4|x|, \quad z \text{ arbitraire}, \quad |q| < 2 \tag{118}$$

la fonction $f(x, y, z, q)$ remplie les hypothèses du théorème 1 avec $M = 4$.

Posons:

$$\omega(\eta) \overset{\mathrm{df}}{=} 2 + \sin \eta. \tag{119}$$

Nous avons évidemment pour tout η:

$$\omega(\eta) > 0. \tag{120}$$

Le système d'équations pour les caractéristiques de l'équation (116) a la forme:

$$y' = -2q, \quad z' = -q^2, \quad q' = 0. \tag{121}$$

L'intégrale du système (121) passant par le point

$$(0, \eta, \omega(\eta), \omega'(\eta))$$

a la forme:

$$y = \eta - 2x \cos \eta, \quad z = 2 + \sin \eta - x \cos^2 \eta, \quad q = \cos \eta. \tag{122}$$

Il est aisé de voir que par tout point de l'ensemble:

$$|x| < \tfrac{1}{4}, \quad |y| \leqslant 7 - 4|x| \tag{123}$$

il passe une et une seule droite de la famille:

$$y = \eta - 2x \cos \eta \tag{124}$$

correspondant au paramètre η vérifiant l'inégalité $|\eta| \leqslant 7$. Il en résulte, en vertu de la méthode classique de Cauchy, qu'il existe

une intégrale $\varphi_1(x,y)$ de l'équation (116) définie, de classe C^1 et formée des caractéristiques dans l'ensemble (123) telle que:

$$\varphi_1(0,y)=2+\sin y.$$

La fonction:

$$\varphi_2(x,y)=0$$

est évidemment aussi une intégrale formée de caractéristiques [8]) dans l'ensemble (123) et nous avons, d'après (120):

$$\varphi_1(0,y)>\varphi_2(0,y). \tag{125}$$

Les éléments de contact des intégrales φ_1 et φ_2 appartenant, d'après $q=\cos\eta$, à l'ensemble (118), il en résulte, en vertu du théorème 1, que l'inégalité:

$$\varphi_1(x,y)>\varphi_2(x,y) \tag{126}$$

est remplie dans l'ensemble (123).

D'autre part on voit aisément que pour $|\eta|<\operatorname{arc}\sin\frac{1}{7}$ et $0\leqslant x<\frac{7}{2}$ deux droites de la famille (124) correspondant aux différentes valeurs du paramètre η ne se rencontrent pas. Il en résulte, en vertu de la méthode de Cauchy, que l'intégrale $\varphi_1(x,y)$ existe dans le domaine couverts par ces droites, pour $0\leqslant x<\frac{7}{2}$. Le point $x=3$, $y=-6$ situé sur la droite correspondant à $\eta=0$ appartient à ce domaine et nous avons, comme il résulte de (122):

$$\varphi_1(3,-6)=-1. \tag{127}$$

Dans le domaine envisagé les deux intégrales φ_1 et φ_2 sont formées des caractéristiques issues des points de l'ensemble:

$$x=0,\quad |y|\leqslant 7. \tag{128}$$

Néanmoins nous avons, d'après (127):

$$\varphi_1(3,-6)<\varphi_2(3,-6). \tag{129}$$

§ 3.

Nous nous adressons maintenant à l'examen du système de la forme (7). Pour simplifier l'énoncé et la démonstration du théorème de ce paragraphe nous allons donner d'abord quelques remarques préliminaires.

---

[8]) Les projections sur le plan x,y des caractéristiques dont est formée l'intégrale φ_2 sont des droites parallèles à l'axe x.

Remarques préliminaires.

Considérons dans l'espace à $k+n$ dimensions l'ensemble défini par les inégalités:

$$(130)\qquad \begin{aligned} &|x_\nu - \mathring{x}_\nu| < a, && (\nu=1,\ldots,k),\\ &|y_i - \mathring{y}_i| \leqslant a_i - M\sum_{\nu=1}^{k}|x_\nu - \mathring{x}_\nu|, && (i=1,\ldots,n) \end{aligned}$$

où $a>0$, $a_i>0$, $M>0$ et $a<\dfrac{a_i}{M}$.

Supposons que la fonction $f_\nu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,z,q_1,\ldots,q_n)$ soit définie dans un domaine D l'espace à $k+2n+1$ dimensions, dont la projection sur le plan $x_1,\ldots,x_k$, $y_1,\ldots,y_n$ recouvre l'ensemble (130).

Soit $z(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$ une intégrale du système (7) définie et possèdant la différentielle totale en tout point de l'ensemble (130). Introduisons la transformation de M. MAYER:

$$(131)\qquad x_\nu - \mathring{x}_\nu = \lambda_\nu t, \qquad (\nu=1,\ldots,k)$$

où:

$$(132)\qquad |\lambda_\nu| < a, \quad \sum_{\nu=1}^{k}|\lambda_\nu| > 0, \qquad (\nu=1,\ldots,k)$$

$$(133)\qquad 0 \leqslant t < 1+\varepsilon(\lambda), \quad 0<\varepsilon(\lambda)<\min_\nu\left[\frac{a-|\lambda_\nu|}{\sum_{\nu=1}^{k}|\lambda_\nu|}\right],$$

et posons:

$$(134)\qquad Z(t,y_1,\ldots,y_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \overset{\mathrm{df}}{=} z(\mathring{x}_1+\lambda_1 t,\ldots,\mathring{x}_k+\lambda_k t,y_1,\ldots,y_n)$$

pour $(t,y_1,\ldots,y_n)$ appartenant à l'ensemble:

$$(135)\qquad 0\leqslant t<1+\varepsilon(\lambda); \quad |y_i-\mathring{y}_i|\leqslant a_i - M\sum_{\nu=1}^{k}|\lambda_\nu|t, \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Si l'on fixe un système de nombres $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ satisfasiant aux inégalités (132), alors la fonction (134), envisagée comme fonction à $n+1$ variables $t,y_1,\ldots,y_n$, constitue dans l'ensemble (135) une intégrale de l'équation:

$$(136)\qquad \frac{\partial z}{\partial t} = F\left(t,y_1,\ldots,y_n,z,\frac{\partial z}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial z}{\partial y_n},\lambda_1,\ldots,\lambda_k\right)$$

où:

(137) $$F(t, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \overset{\mathrm{df}}{=}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu f_\nu(\mathring{x}_1 + \lambda_1 t, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_k t, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n).$$

Cette intégrale satisfait, d'après (134), à la condition initiale:

(138) $$Z(0, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = z(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n).$$

Théorème 4. Supposons que les fonctions

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$$

ainsi que leurs dérivées $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial y_i}, \dfrac{\partial f_\nu}{\partial z}, \dfrac{\partial f_\nu}{\partial q_j}$ soient continues dans le domaine D et que ces dérivées remplissent la condition de Lipschitz par rapport aux variables $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$; et les inégalités:

(139) $$\left|\frac{\partial f_\nu}{\partial q_j}\right| < M.$$

Soient $u(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ et $v(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ deux intégrales du système (7) définies et possédant la différentielle totale en tout point de l'ensemble (130) et telles que leurs éléments de contact:

(140) $$x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_n}$$

(141) $$x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, v, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y_n}$$

appartiennent au domaine D.

Supposons que les fonctions u et v jouissent de la suivante propriété (P):

Pour tout système $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de nombres satisfaisant aux inégalités (132) les fonctions:

(142) $$u(\mathring{x}_1 + \lambda_1 t, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_k t, y_1, \ldots, y_n)$$

(143) $$v(\mathring{x}_1 + \lambda_1 t, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_k t, y_1, \ldots, y_n)$$

considérées comme intégrales de l'équation (136) dans l'ensemble (135) sont formées des caractéristiques (cf. § 1, théorème 1). Supposons enfin qu'on ait, dans l'ensemble (130) pour $x_\nu = \mathring{x}_\nu$, l'inégalité:

$$u(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n) > v(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n). \tag{144}$$

Dans ces hypothèses, l'inégalité:

$$u(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) > v(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \tag{145}$$

est remplie dans l'ensemble (130) *tout entier.*

Démonstration: Soit $\overset{*}{P}(\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_k, \overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n)$ un point quelconque de l'ensemble (130), différent du point $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n)$ et posons:

$$\lambda_\nu = \overset{*}{x}_\nu - \mathring{x}_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{146}$$

$$U(t, y_1, \ldots, y_n) \overset{\mathrm{df}}{=} u(\mathring{x}_1 + \lambda_1 t, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_k t, y_1, \ldots, y_n) \tag{147}$$

$$V(t, y_1, \ldots, y_n) \overset{\mathrm{df}}{=} v(\mathring{x}_1 + \lambda_1 t, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_k t, y_1, \ldots, y_n) \tag{148}$$

dans l'ensemble (135). Les fonctions U et V constituent alors (cf. remarques préliminaires) deux intégrales de l'équation (136), pour lesquelles on a:

$$U(0, y_1, \ldots, y_n) = u(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n) \tag{149}$$

$$V(0, y_1, \ldots, y_n) = v(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n). \tag{150}$$

D'après (137) et (138) nous avons:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial q_j}\right| < M \sum_{\nu=1}^{k} |\lambda_\nu|. \tag{151}$$

En vertu de la propriété (P) les intégrales U et V sont formées des caractéristiques dans l'ensemble (135) et vérifient, d'après (144), (147) et (148) l'inégalité:

$$U(0, y_1, \ldots, y_n) > V(0, y_1, \ldots, y_n). \tag{152}$$

On constate donc sans difficulté que toutes les hypothèses du théorème 1 (cf. § 1) sont remplies pour l'équation (136), les intégrales U et V et l'ensemble (135). Nous avons par conséquent:

(153) $$U(t, y_1, \ldots, y_n) > V(t, y_1, \ldots, y_n).$$

dans l'ensemble (135) tout entier. En particulier pour $t=1$ et $y_i = \mathring{y}_i$, $(i=1, \ldots, n)$:

(154) $$U(1, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n) > V(1, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$$

ou ce qui revient au même, d'après (146), (147) et (148):

(155) $$u(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n) > v(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n).$$

Le point $\mathring{P}$ étant un point quelconque de l'ensemble (130) le théoréme 4 se trouve ainsi démontré.

Théorème 4 bis. Supposons que les fonctions

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$$

remplissent les hypothèses du théorème 4 dans un domaine D dont la projection sur le plan $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n$ recouvre l'ensemble:

(156) $$|x_\nu - \mathring{x}_\nu| < a; \quad y_1, \ldots, y_n \quad \text{arbitraires.}$$

Soit $u(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ et $v(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ deux intégrales du système (7) définies, possédant la différentielle totale et jouissant de la propriété (P) dans l'ensemble (156). Supposons enfin que les fonctions u et v satisfassent à l'inégalité (144) et que leurs éléments de contact (140) et (141) appartiennent au domaine D.

Dans ces hypothèses, l'inégalité (145) *est remplie dans l'ensemble* (156) *tout entier.*

La démonstration découle du théorème 4, tout comme celle du théorème 1 bis a résulté du théorème 1.

Remarque 6. Les intégrales u et v jouissent de la propriété (P) lorsqu'elles sont, par exemple, de classe C^2 (cf. remarque 1, § 1).

Remarque 7. Le fait essentiel du théorème 4 et 4 bis consiste en ce que les ensembles (130) et (156) ne dépendent point de la forme particulière des fonctions f_ν.

§ 4.

Nous allons donner, à présent, deux applications des théorèmes 4 et 4 bis dans le cas, où certaines hypothèses supplémentaires sur les fonctions f_ν permettent de faire usage des théorèmes d'existence.

1. Nous introduirons d'abord des hypothèses suivantes:

Hypothèses Z_1.

Considérons dans l'espace à $2n+k+1$ dimensions l'ensemble défini par les inégalités:

$$(157)\qquad \begin{aligned} &|x_\nu-\mathring{x}_\nu|\leqslant C, \quad (\nu=1,\dots,k); \qquad |y_i-\mathring{y}_i|\leqslant C, \quad (i=1,\dots,n).\\ &|z-\mathring{z}|\leqslant C; \quad |q_i-\mathring{q}_i|\leqslant C, \qquad (i=1,\dots,n). \end{aligned}$$

Supposons que les fonctions $f_\nu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n,z,q_1,\dots,q_n)$ ainsi que leurs dérivées partielles du premier et du second ordre par rapport aux variables $y_1,\dots,y_n,z,q_1,\dots,q_n$ soient continues dans l'ensemble (157) et remplissent les inégalités:

$$(158)\qquad \left.\begin{matrix} |f| \\ \left|\dfrac{\partial f_\nu}{\partial y_i}\right|, \left|\dfrac{\partial f_\nu}{\partial z}\right|, \left|\dfrac{\partial f_\nu}{\partial q_i}\right| \\ \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_i\partial y_j}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_i\partial q_j}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_i\partial z}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial q_i\partial q_j}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial q_i\partial z}\right| \end{matrix}\right| < M.$$

Supposons que le système (7) soit en involution c. à d. qu'on ait dans l'ensemble (157) les identités:

$$(159)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial f_\mu}{\partial z}f_\nu+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_\mu}{\partial q_j}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_j}+q_j\frac{\partial f_\nu}{\partial z}\right)=\\ &=\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}+\frac{\partial f_\nu}{\partial z}f_\mu+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial q_j}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial y_j}+q_j\frac{\partial f_\mu}{\partial z}\right), \quad (\mu,\nu=1,\dots,n). \end{aligned}$$

Soit $\omega(y_1,\ldots,y_n)$ une fonction de classe C^2, pour $(y_1,\ldots,y_n)$ appartenant au cube:

$$(160)\qquad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant C, \qquad (i=1,\ldots,n)$$

et remplissant les inégalités:

$$(161)\qquad \left|\frac{\partial\omega}{\partial y_j}\right| < M; \quad \left|\frac{\partial^2\omega}{\partial y_j \partial y_j}\right| < M.$$

Supposons enfin qu'on ait les inégalités:

$$(162)\qquad |\mathring{q}_i| < M, \qquad (i=1,\ldots,n)$$

$$(163)\qquad |\omega_{y_i}(\mathring{y}_1,\ldots,\mathring{y}_n) - \mathring{q}_i| \leqslant \frac{C}{4}; \qquad |\omega(\mathring{y}_1,\ldots,\mathring{y}_n) - \mathring{z}| < \frac{C}{4}.$$

Remarque 8.

Dans les hypothèses Z_1 il existe [9]), une intégrale unique $\varphi(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$ du système (7), définie et de classe C^1 dans l'ensemble:

$$(164)\qquad |x_\nu - \mathring{x}_\nu| < \delta(C,n,k,M); \quad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant \frac{C}{4n(M+1)} - M\sum_{\nu=1}^{k}|x_\nu - \mathring{x}_\nu|$$
$$\nu=1,\ldots,k \qquad\qquad i=1,\ldots,n$$

où:

$$(165)\qquad \delta(C,n,k,M) = \min\left(\frac{1}{n}, \frac{C}{4n(M+1)Mk}, \frac{C^2}{k[(n+1)(M+k+1)]^5}\right)$$

telle que:

$$(166)\qquad \varphi(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_k,y_1,\ldots,y_n) \equiv \omega(y_1,\ldots,y_n)$$

dans l'ensemble:

$$(167)\qquad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant \frac{C}{4n(M+1)}, \qquad (i=1,\ldots,n).$$

La fonction $\varphi(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$ jouit en plus de la propriété (P) (cf. § 3, th. 4) et de la propriété suivante (Q):

(Q) Lorsque la fonction $\omega(y_1,\ldots,y_n,\lambda)$ satisfait aux hypothèses Z_1 et dépend continûment d'un paramètre λ variant dans un intervalle Δ, alors l'intégrale correspondante φ est une fonction continue par rapport à λ.

---

[9]) Ceci fut démontré par M. W. Pawelski.

Théorème 5. Supposons que les hypothèses Z_1 soient remplies pour les fonctions $f_\nu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n,z,q_1,\dots,q_n)$ et pour les fonctions $\omega^{(1)}(y_1,\dots,y_n)$, $\omega^{(2)}(y_1,\dots,y_u)$. Désignons par $\varphi^{(1)}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)$ et $\varphi^{(2)}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)$ les intégrales uniques du système (7) définies et de classe C^1 dans l'ensemble (164) et telles que:

$$\varphi^{(1)}(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_k,y_1,\dots,y_n)\equiv\omega^{(1)}(y_1,\dots,y_n) \tag{168}$$

$$\varphi^{(2)}(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_k,y_1,\dots,y_n)\equiv\omega^{(2)}(y_1,\dots,y_n) \tag{169}$$

dans le cube (167).

Dans ces hypothèses, lorsque l'inégalité:

$$\omega^{(1)}(y_1,\dots,y_n)>\omega^{(2)}(y_1,\dots,y_n) \tag{170}$$

est remplie dans le cube (167), *alors l'inégalité*:

$$\varphi^{(1)}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)>\varphi^{(1)}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n) \tag{171}$$

est vérifiée dans l'ensemble (164) *tout entier.*

Ce théorème découle immédiatement de la propriété (P) et du théorème 4.

Théorème 6. *Dans les hypothèses du théorème* 5, *lorsque l'inégalité*:

$$\omega^{(1)}(y_1,\dots,y_n)\geqslant\omega^{(2)}(y_1,\dots,y_n) \tag{172}$$

est remplie dans le cube (167), *alors l'inégalité*:

$$\varphi^{(1)}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)\geqslant\varphi^{(2)}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n) \tag{173}$$

est vérifiée dans l'ensemble (164) *tout entier.*

Démonstration: Posons:

$$\omega(y_1,\dots,y_n,\lambda)\overset{\mathrm{df}}{=}\omega^{(1)}(y_1,\dots,y_n)+\lambda. \tag{174}$$

Pour λ suffisamment petit et positif la fonction $\omega(y_1,\dots,y_n,\lambda)$ satisfait aux hypothèses Z_1 et on a, d'après (172) et (174):

$$\omega(y_1,\dots,y_n,\lambda)>\omega^{(2)}(y_1,\dots,y_n), \tag{175}$$

dans le cube (167). Désignons par $\varphi(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,\lambda)$ l'intégrale du système (7) définie et de classe C^1 dans l'ensemble (164) (cf. remarque 8) remplissant l'identité:

$$(176) \qquad \varphi(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_k,y_1,\ldots,y_n,\lambda)\equiv\omega(y_1,\ldots,y_n,\lambda)$$

dans le cube (167). En vertu du théorème 5 nous avons alors:

$$(177) \qquad \varphi(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,\lambda)>\varphi^{(2)}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$$

dans l'ensemble (164). En faisant tendre λ vers 0 nous obtenons à la limite, d'après la propriété (Q) et (177):

$$(178) \qquad \varphi(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,0)\geqslant\varphi^{(2)}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$$

dans l'ensemble (164). D'autre part, puisque:

$$(179) \quad \varphi(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_k,y_1,\ldots,y_n,0)\equiv\omega(y_1,\ldots,y_n,0)\equiv\omega^{(2)}(y_1,\ldots,y_n)$$

il résulte de l'unicité des intégrales du système (7) que:

$$(180) \qquad \varphi(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,0)\equiv\varphi^{(1)}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$$

dans l'ensemble (164), ce qui termine la démonstration.

2. Introduisons maintenant des hypothèses suivantes:

Hytophèses Z_2. Supposons que les fonctions

$$f_\nu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,z,q_1,\ldots,q_n)$$

ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre relatives aux variables $y_1,\ldots,y_n,z,q_1,\ldots,q_n$ soient continues dans l'ensemble:

$$(181) \quad |x_\nu-\mathring{x}_\nu|<a, \quad (\nu=1,\ldots,k); \quad y_1,\ldots,y_n,z,q_1,\ldots,q_n \text{ arbitraires}$$

et remplissent les inégalités (158). Supposons que les identités (159) soient satisfaites dans l'ensemble (181). Soit $\omega(y_1,\ldots,y_n)$ une fonction de classe C^2 pour $(y_1,\ldots,y_n)$ arbitraires, remplissant les inégalités:

$$(182) \qquad \left|\frac{\partial\omega}{\partial y_j}\right|+\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2\omega}{\partial y_i\partial y_j}\right|\leqslant B, \qquad (j=1,\ldots,n).$$

Soit enfin:

$$(183) \qquad 0 < \beta < \frac{1}{kM} \ln\left(1 + \frac{\ln 3}{2n(B+1)}\right); \quad a = \min(\alpha, \beta).$$

Remarque 9. Dans ces hypothèses, il existe [10]) une intégrale unique $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ du système (7), définie et de classe C^1 dans l'ensemble:

$$(184) \qquad |x_\nu - \mathring{x}_\nu| < a, \quad (\nu = 1, \ldots, k); \quad y_1, \ldots, y_n \text{ arbitraires}$$

telle que:

$$(185) \qquad \varphi(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n) \equiv \omega(y_1, \ldots, y_n).$$

Cette intégrale jouit en plus des propriétés (P) et (Q) (cf. remarque 8), lorsqu'on remplace Z_1 par Z_2.

Théorème 5 bis. Supposons que les hypothèses Z_2 soient remplies pour les fonctions $f_\nu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ et les fonctions $\omega^{(1)}(y_1, \ldots, y_n)$, $\omega^{(2)}(y_1, \ldots, y_n)$. Désignons par $\varphi^{(1)}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ et $\varphi^{(2)}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ les intégrales uniques du système (7) définies et de classe C^1 dans l'ensemble (184) et vérifiant les identités (168) et (169) pour $y_1, \ldots, y_n$ arbitraires.

Dans ces hypothèses, lorsque l'inégalité (170) *est remplie pour* $y_1, \ldots, y_n$ *arbitraires, alors l'inégalité* (171) *est vérifiée dans l'ensemble* (184) *tout entier.*

Ce théorème résulte immédiatement de la propriété (P) et du théorème 4 bis

Théorème 6 bis. *Dans les hypothèses du théorème 5 bis, lorsque l'inégalité* (172) *est remplie pour* $y_1, \ldots, y_n$ *arbitraires, alors l'inégalité* (173) *est vérifiée dans l'ensemble* (184) *tout entier.*

On le démontre tout comme le théorème 6.

Remarque 10. Le fait essentiel des théorèmes 5, 6, 5 bis et 6 bis consiste en ce que l'ensemble (164) respectivement l'ensemble (184) ne dépend point de la forme particulière des fonctions f_ν, $\omega^{(1)}$ et $\omega^{(2)}$.

---

[10]) E. Kamke, cf. [7]).

§ 5.

Nous passons maintenant à l'examen du système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues de la forme:

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x} = f_\nu\left(x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial z_\nu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z_\nu}{\partial y_n}\right), \quad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{186}$$

où la ν-ième équation contient toutes les fonctions inconnues $z_1, \ldots, z_k$ et les dérivées partielles du premier ordre de la seule fonction z_ν.

Nous introduisons d'abord des hypothèses suivantes:

Hypothèses *R*.

Supposons que les fonctions $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k, q_1^{(\nu)}, \ldots, q_n^{(\nu)})$ soient de classe C^2 dans l'ensemble:

$$|x - \mathring{x}| < a; \quad y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k, q_1^{(\nu)}, \ldots, q_n^{(\nu)} \text{ arbitraires} \tag{187}$$

et remplissent les inégalités:

$$\left.\begin{array}{c} \left|\dfrac{\partial f_\nu}{\partial y_i}\right|, \left|\dfrac{\partial f_\nu}{\partial z_\mu}\right|, \left|\dfrac{\partial f}{\partial q_i^{(\nu)}}\right| \\ \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_i \partial y_j}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial z_\mu \partial z_\lambda}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial q_i^{(\nu)} \partial q_j^{(\nu)}}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial z_\mu \partial y_i}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial z_\mu \partial q_i^{(\nu)}}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_i \partial q_j^{(\nu)}}\right| \end{array}\right| < M. \tag{188}$$

Soient:

$$\omega_\nu(y_1, \ldots, y_n), \quad (\nu = 1, \ldots, k), \tag{189}$$

k fonctions de classe C^2 pour $y_1, \ldots, y_n$ arbitraires, remplissant les inégalités:

$$\left|\frac{\partial \omega_\nu}{\partial y_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 \omega_\nu}{\partial y_i \partial y_j}\right| < M. \tag{190}$$

Remarque 11.

Posons:

$$c = \{4M(n+k)[1 + 2M(n+k)]\}^{-1} \tag{191}$$

$$r = 2M + \frac{1}{2(n+k)} \tag{192}$$

$$N = M(1 + 3kr + k^2 r^2). \tag{193}$$

Désignons par p la racine de l'équation:

$$N(1+nN+N)\int_0^x e^{\int_0^x \lambda(t)dt}\,dx=\frac{1}{n} \tag{194}$$

où:

$$\lambda(t)=N+2nN(1+N)e^{Nt}$$

et posons:

$$b=\min(a,c,p).$$

Dans les hypothèses R [11]) le système (186) admet une intégrale unique:

$$\varphi_1(x,y_1,\dots,y_n),\dots,\varphi_k(x,y_1,\dots,y_n), \tag{195}$$

définie et douée des dérivées partielles du premier ordre continues dans l'ensemble:

$$|x-\mathring{x}|<b;\quad y_1,\dots,y_n \quad \text{arbitraires} \tag{196}$$

et telle que:

$$\varphi_\nu(\mathring{x},y_1,\dots,y_n)=\omega_\nu(y_1,\dots,y_n),\qquad (\nu=1,\dots,k). \tag{197}$$

Cette intégrale jouit en plus de la propriété (S) suivante [12]):

Pour tout ensemble fermé et borné contenu dans l'ensemble (196) il existe une constante $C(M,k,n)$ qui ne dépend que des M,n,k telle que la fonction φ_ν et ses dérivées $\dfrac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_i}$ remplissent dans cet ensemble la condition de Lipschitz par rapport aux variables: $x,y_1,\dots,y_n$ avec la constante C.

Théorème 7. Supposons que les hypothèses R soient remplies pour les fonctions $f_\nu(x,y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_k,q_1^{(\nu)},\dots,q_n^{(\nu)})$ et les fonctions: $\omega_\nu^{(1)}(x,y_1,\dots,y_n)$, $\omega_\nu^{(2)}(x,y_1,\dots,y_n)$, $(\nu=1,\dots,k)$. Supposons que les fonctions f_ν satisfassent à la suivante condition (W) de monotonie:

---

[11]) T. Ważewski, *Sur le problème de Cauchy relatif à un système d'équations aux dérivées partielles*. Ann. Soc. Pol. T. XV, 1936.

[12]) La propriété (S) n'est pas formulée explicitement dans le travail plus haut cité, mais elle en résulte facilement.

Lorsque:

$$\left.\begin{array}{ll}(198) & \bar{z}_1 \geqslant \bar{\bar{z}}_1, \ldots, \bar{z}_{\nu-1} \geqslant \bar{\bar{z}}_{\nu-1}, \bar{z}_\nu = \bar{\bar{z}}_\nu, \bar{z}_{\nu+1} \geqslant \bar{\bar{z}}_{\nu+1}, \ldots, \bar{z}_k \geqslant \bar{\bar{z}}_k \\ \text{alors:} & \\ (199) & \begin{array}{l} f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k, q_1^{(\nu)}, \ldots, q_n^{(\nu)}) \geqslant \\ \qquad \geqslant f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \bar{\bar{z}}_1, \ldots, \bar{\bar{z}}_k, q_1^{(\nu)}, \ldots, q_n^{(\nu)}) \end{array}\end{array}\right| (W).$$

Désignons par:

$$(200) \qquad \varphi_1^{(1)}(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_k^{(1)}(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$$(201) \qquad \varphi_1^{(2)}(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_k^{(2)}(x, y_1, \ldots, y_n),$$

les intégrales uniques du système (186) définies et de classe C^1 dans l'ensemble (196) et telles que (cf. remarque 11):

$$\begin{array}{ll}(202) & \varphi_\nu^{(1)}(\mathring{x}, y_1, \ldots, y_n) \equiv \omega_\nu^{(1)}(y_1, \ldots, y_n), \\ (203) & \varphi_\nu^{(2)}(\mathring{x}, y_1, \ldots, y_n) \equiv \omega_\nu^{(2)}(y_1, \ldots, y_n),\end{array} \qquad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Dans ces hypothèses, lorsque les inégalités:

$$(204) \qquad \omega_\nu^{(1)}(y_1, \ldots, y_n) \geqslant \omega_\nu^{(2)}(y_1, \ldots, y_n), \qquad (\nu = 1, \ldots, k),$$

sont remplies pour $y_1, \ldots, y_n$ *arbitraires, alors les inégalités*:

$$(205) \qquad \varphi_\nu^{(1)}(x, y_1, \ldots, y_n) \geqslant \varphi_\nu^{(2)}(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad (\nu = 1, \ldots, k)$$

subsistent dans l'ensemble (196) *tout entier.*

Démonstration. Posons:

$$\left.\begin{array}{ll}(206) & \begin{array}{l} F_\nu^{(\mu)}(x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k, q_1^{(\nu)}, \ldots, q_n^{(\nu)}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \\ = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k, q_1^{(\nu)}, \ldots, q_n^{(\nu)}) + \dfrac{1}{\mu} \end{array} \\ (207) & \Omega_\nu^{(\mu)}(y_1, \ldots, y_n) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \omega_\nu^{(1)}(y_1, \ldots, y_n) + \dfrac{1}{\mu}\end{array}\right| \quad \begin{array}{l}(\nu = 1, \ldots, k) \\ (\mu = 3, 4, \ldots)\end{array}$$

et considérons le système auxiliaire:

$$(208) \qquad \frac{\partial z_\nu}{\partial x} = F_\nu^{(\mu)}(x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k, q_1^{(\nu)}, \ldots, q_n^{(\nu)}), \ (\nu = 1, \ldots, k) \ (S_\mu).$$

Pour tout μ les fonctions $F_\nu^{(\mu)}$, $(\nu=1,\ldots,k)$ et $\Omega_\nu^{(\mu)}$, $(\nu=1,\ldots,k)$ satisfont aux hypothèses R. Désignons donc par $\varphi_\nu^{(\mu)}$, $(\nu=1,\ldots,k)$ l'intégrale unique du système (S_μ) définie et de classe C^1, (cf. remarque 11), dans l'ensemble (196) et telle que:

$$(209) \qquad \varphi_\nu^{(\mu)}(\mathring{x},y_1,\ldots,y_n)\equiv\Omega_\nu^{(\mu)}(y_1,\ldots,y_n), \qquad (\nu=1,\ldots,k).$$

D'après (206) et (207) nous avons:

$$(210) \qquad \lim_{\mu\to\infty} F_\nu^{(\mu)}=f_\nu,$$

$$(211) \qquad \lim_{\mu\to\infty} \Omega_\nu^{(\mu)}=\omega_\nu^{(1)}, \qquad (\nu=1,\ldots,k)$$

et ceci uniformément.

D'autre part, comme il résulte de la propriété (S), (cf. remarque 11), dans tout ensemble fermé et borné contenu dans (196) les fonctions de la suite $\varphi_\nu^{(\mu)}$, $(\mu=3,4,\ldots)$ et de la suite $\dfrac{\partial\varphi_\nu^{(\mu)}}{\partial y_i}$, $(\mu=3,4,\ldots)$ sont également continues. Il en résulte que de toute suite partielle $\varphi_\nu^{(\mu_\alpha)}$ on en peut extraire une autre presque uniformément convergente dans l'ensemble (196) vers une limite qui est, d'après (210) et (211), l'intégrale du système (186) prenant pour $x=\mathring{x}$ les valeurs initiales $\omega_\nu^{(1)}$. Mais puisque $\varphi_\nu^{(1)}$ $(\nu=1,\ldots,k)$ est l'unique intégrale possédant cette propriété, il s'ensuit que:

$$(212) \qquad \lim_{\mu\to\infty}\varphi_\nu^{(\mu)}=\varphi_\nu^{(1)}, \qquad (\nu=1,\ldots,k)$$

presque uniformément dans l'ensemble (186).

D'après (206), nous avons ($\varphi_\nu^{(\mu)}$, $(\nu=1,\ldots,k)$, étant intégrale du système (S_μ)):

$$(213) \quad \frac{\partial\varphi_\nu^{(\mu)}}{\partial x} > f_\nu\left(x,y_1,\ldots,y_n,\varphi_1^{(\mu)},\ldots,\varphi_k^{(\mu)},\frac{\partial\varphi_\nu^{(\mu)}}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial\varphi_\nu^{(\mu)}}{\partial y_n}\right), \ (\nu=1,\ldots,k).$$

D'autre part $\varphi_\nu^{(2)}$, $(\nu=1,\ldots,k)$, étant intégrale du système (186) on a:

$$(214) \quad \frac{\partial\varphi_\nu^{(2)}}{\partial x} \leqslant f_\nu\left(x,y_1,\ldots,y_n,\varphi_1^{(1)},\ldots,\varphi_k^{(1)},\frac{\partial\varphi_\nu^{(1)}}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial\varphi_\nu^{(1)}}{\partial y_n}\right), \ (\nu=1,\ldots,k).$$

En vertu de (202), (203), (204) et (209), nous avons:

(215) $$\varphi_\nu^{(\mu)}(\mathring{x}, y_1, \ldots, y_n) > \varphi_\nu^{(2)}(\mathring{x}, y_1, \ldots, y_n), \qquad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Soit $\overset{*}{P}(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n)$ un point quelconque de l'ensemble (196) et $\overset{*}{x} \geqslant \mathring{x}$. Le point $\overset{*}{P}$ fait partie de l'ensemble:

(216) $$\mathring{x} \leqslant x < \mathring{x} + b; \quad |y_i| \leqslant l - M(x - \mathring{x}), \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

pourvu que $l > 0$ soit un nombre suffisamment grand. Les fonctions f_ν, $(\nu = 1, \ldots, k)$, satisfaisant à la condition (W) de monotonie, il résulte des inégalités (213), (214) et (215) et des hypothèses R que:

(217) $$\varphi_\nu^{(\mu)}(x, y_1, \ldots, y_n) > \varphi_\nu^{(2)}(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad \begin{matrix}(\nu = 1, \ldots, k)\\ (\mu = 3, 4, \ldots,)\end{matrix}$$

dans l'ensemble (216) tout entier [13]).

Il en résulte, d'après (212), l'inégalité:

(218) $$\varphi_\nu^{(1)}(x, y_1, \ldots, y_n) \geqslant \varphi_\nu^{(2)}(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad (\nu = 1, \ldots, k),$$

dans l'ensemble (216), et en particulier au point $\overset{*}{P}$. Le point $\overset{*}{P}$ étant un point quelconque de l'ensemble:

(219) $$\mathring{x} \leqslant x < \mathring{x} + b; \quad y_1, \ldots, y_n \ \text{ arbitraires},$$

il s'ensuit que l'inégalité (217) subsiste en tout point de cet ensemble. En effectuant la transformation: $X = -x$; $Y_i = y_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ on montre que l'inégalité (218) est aussi vérifiée dans l'ensemble:

(220) $$-b + \mathring{x} < x \leqslant \mathring{x}; \quad y_1, \ldots, y_n \ \text{ arbitraires},$$

ce qui termine la démonstration de notre théorème.

Remarque 12. Le fait essentiel du théorème 7, réside en ce que l'ensemble (196) ne dépend point de la forme particuliére des fonctions f_ν, $\omega_\nu^{(1)}$, et $\omega_\nu^{(2)}$.

---

[13]) J. Szarski, *Sur certains systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, théorème 3 bis. Ann. Soc. Pol. Math. t. XX. fasc. 1.

Remarque 13. On peut formuler un théorème analogue lorsqu'on envisage le système (186) dans l'ensemble de la forme:

(221) $|x-\mathring{x}|\leqslant C;\quad |y_i-\mathring{y}_i|\leqslant C;\quad |z_\nu-\mathring{z}_\nu|\leqslant C;\quad |q_i^{(\nu)}-\mathring{q}|\leqslant C.$

Les inégalités (205) seraient alors remplies dans un ensemble de la forme:

(222) $|x-\mathring{x}|<\vartheta;\quad |y_i-\mathring{y}_i|\leqslant a_i-M|x-\mathring{x}|.$

UNE GÉNÉRALISATION DE L'ÉCART ET DU DIAMÈTRE TRANSFINI D'UN ENSEMBLE

Par F. Leja (Kraków)

1. Soit R un espace métrique, α un nombre entier plus grand ou au moins égal à 2, $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha$ un système de α points de R et

$$\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_\alpha)$$

une fonction définie continue et admettant des valeurs non négatives en chaque système de α points de R. Nous supposerons 1° que Φ soit symétrique par rapport à ses variables, c'est-à-dire que, $i_1, i_2, \ldots, i_\alpha$ étant une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, \alpha$, on a toujours

$$\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_\alpha) = \Phi(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_\alpha})$$

et 2° que $\Phi = 0$ lorsque $p_i = p_k$ pour $i \neq k$.

Par exemple, la distance des points p_1 et p_2 est une fonction Φ pour $\alpha = 2$. Lorsque R est le plan la fonction

$$\Phi(p_1, p_2) = \text{la valeur absolue de } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \end{vmatrix},$$

où x_i, y_i sont les coordonnées du point p_i, est aussi une fonction Φ.

Dans le cas $\alpha = 3$, $\Phi(p_1, p_2, p_3)$ peut représenter l'aire du triangle des sommets p_1, p_2, et p_3 ou le volume du tétraèdre $Op_1p_2p_3$ où O est un point fixe de R etc.

Étant donné un système de $n \geqslant \alpha$ points de R

$$(1) \qquad p_1, p_2, \ldots, p_n, \qquad n \geqslant \alpha,$$

désignons par $V(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ le produit à $\binom{n}{\alpha}$ facteurs que voici

$$(2) \qquad V(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\alpha \leqslant n} \Phi(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_\alpha})$$

et par $\Delta_k(p_1,\dots,p_n)$ le produit à $\binom{n-1}{\alpha-1}$ facteurs suivants

(3) $$\Delta_k(p_1,\dots,p_n)=\prod_{\substack{1\leqslant i_2<i_3<\dots<i_\alpha\leqslant n \\ (i_\nu\neq k)}}\Phi(p_k,p_{i_2},p_{i_3},\dots,p_{i_\alpha})$$

où k parcourt les nombres $1,2,\dots,n$.

Observons que, si $n=\alpha$, on a

(4) $$V(p_1,\dots,p_\alpha)=\Delta_k(p_1,\dots,p_\alpha)\quad\text{pour } k=1,2,\dots,n$$

et que, si $n>\alpha$, on a pour $k=1,2,\dots,n$ la relation

(5) $$V(p_1,\dots,p_n)=\Delta_k(p_1,\dots,p_n)\cdot V(p_1,\dots,p_{k-1},p_{k+1},\dots,p_n).$$

Puisque le facteur $\Phi(p_{i_1},p_{i_2},\dots,p_{i_\alpha})$ du produit (2) est un facteur de tous les produits (3) où $k=i_1,i_2,\dots,i_\alpha$ il est facile de voir que

(6) $$\prod_{k=1}^{n}\Delta_k(p_1,\dots,p_n)=[V(p_1,\dots,p_n)]^\alpha.$$

Ceci posé, considérons un ensemble fermé et compact E de points de R et désignons par $V_n=V_n(E)$ la borne supérieure du produit (2) lorsque $n\geqslant\alpha$ étant quelconque mais fixe les points (1) parcourent arbitrairement l'ensemble E

(7) $$V_n=\sup_{p_i\in E}V(p_1,\dots,p_n).$$

Je dis que:

I. La suite

(8) $$v_n=\sqrt[\binom{n}{\alpha}]{V_n},\qquad n=\alpha,\ \alpha+1,\dots$$

tend vers une limite finie.

En effet, puisque l'ensemble E est fermé et compact la borne (7) est atteinte dans E, c'est-à-dire il existe un système de n points $q_1,q_2,\dots,q_n$ de E pour lesquels

$$V_n=V(q_1,q_2,\dots,q_n).$$

Soit $n>\alpha$; d'après (5) on a

$$V_n\leqslant\Delta_k(q_1,\dots,q_n)\cdot V_{n-1}\quad\text{pour } k=1,2,\dots,n,$$

et par suite en vertu de (6)

$$V_n^n\leqslant V_{n-1}^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\Delta_k(q_1,\dots,q_n)=V_{n-1}^n\cdot V_n^\alpha$$

d'où l'on trouve

$$\sqrt[n]{V_n} \leqslant \sqrt[n-\alpha]{V_{n-1}}$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$v_n = \sqrt[\binom{n}{\alpha}]{V_n} \leqslant \sqrt[\binom{n-1}{\alpha}]{V_{n-1}} = v_{n-1}$$

et celle-ci implique la thèse.

La limite $\lim v_n$ est non négative et dépend de l'ensemble E et de la fonction Φ

(9) $$\lim_{n\to\infty} v_n = v(E,\Phi).$$

Elle sera dite l'*écart* de l'ensemble E par rapport à la *fonction génératrice* Φ.

2. Considérons maintenant les expressions (3), où $k=1,2,\ldots,n$, et désignons par Δ_n la borne supérieure du plus petit des produits $\Delta_1(p_1,\ldots,p_n)$, $\Delta_2(p_1,\ldots,p_n),\ldots,\Delta_n(p_1,\ldots,p_n)$ lorsque les points $p_1,p_2,\ldots,p_n$ varient arbitrairement dans l'ensemble E

(10) $$\Delta_n = \sup_{(p_l\in E)} \{\min_{(k)} \Delta_k(p_1,\ldots,p_n)\}.$$

La quantité Δ_n est finie car si l'on désigne par c la borne supérieure de Φ dans E on a

$$\Delta_k(p_1,\ldots,p_n) \leqslant c^{\binom{n-1}{\alpha-1}}$$

pour chaque $k=1,2,\ldots,n$ et chaque système de n points $p_1,\ldots,p_n$ de E. Je dis que:

II. La suite

(11) $$\delta_n = \sqrt[\binom{n-1}{\alpha-1}]{\Delta_n}, \qquad n=\alpha,\ \alpha+1,\ldots$$

est convergente et tend vers l'écart $v(E,\Phi)$ de l'ensemble E.

Démonstration. Soit $n>\alpha$. A chaque $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un système de n points de E, soit $p_1,p_2,\ldots,p_n$, tel qu'on ait

$$\Delta_n < \min_{(k)} \Delta_k(p_1,\ldots,p_n)+\varepsilon, \qquad \text{où } k=1,2,\ldots,n.$$

On en déduit l'inégalité

$$(\Delta_n-\varepsilon)^n < \prod_{k=1}^{n} \Delta_k(p_1,\ldots,p_n)$$

et en vertu de (6) et (7)

$$(\Delta_n - \varepsilon)^n < [V(p_1, \ldots, p_n)]^\alpha \leqslant V_n^\alpha.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit on a $\Delta_n \leqslant V_n^{\alpha/n}$ ce qui entraîne l'inégalité

$$\Delta_n^{1:\binom{n-1}{\alpha-1}} \leqslant V_n^{1:\binom{n}{\alpha}} \quad \text{pour } n = \alpha+1, \alpha+2, \ldots$$

D'autre part $\Delta_\alpha = V_\alpha$ en vertu de (4) et par suite

$$(12) \qquad \delta_n \leqslant v_n \qquad \text{pour } n = \alpha, \alpha+1, \ldots$$

Soit maintenant $q_1, \ldots, q_n$ un système de n points de E pour lesquels $V_n = V(q_1, \ldots, q_n)$. D'après (5) on a

$$V_n \leqslant \Delta_k(q_1, \ldots, q_n) \cdot V_{n-1} \qquad \text{pour } k = 1, \ldots, n$$

et par suite

$$V_n \leqslant \{\min_{(k)} \Delta_k(q_1, \ldots, q_n)\} \cdot V_{n-1} \leqslant \Delta_n \cdot V_{n-1}.$$

Pareillement

$$V_{n-1} \leqslant \Delta_{n-1} \cdot V_{n-2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$V_{\alpha+1} \leqslant \Delta_{\alpha+1} \cdot V_\alpha,$$
$$V_\alpha = \Delta_\alpha$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$V_n \leqslant \Delta_\alpha \cdot \Delta_{\alpha+1} \ldots \Delta_n$$

d'où l'on déduit la suivante

$$(13) \qquad v_n \leqslant [\delta_\alpha^{\binom{\alpha-1}{\alpha-1}} \cdot \delta_{\alpha+1}^{\binom{\alpha}{\alpha-1}} \ldots \delta_n^{\binom{n-1}{\alpha-1}}]^{\frac{1}{\binom{n}{\alpha}}}.$$

Désignons par d_n le membre droit de (13). Puisque $v_n \to v(E, \Phi)$ il suit de (12) et (13) que

$$(14) \qquad d_n = [\delta_\alpha^{\binom{\alpha-1}{\alpha-1}} \cdot \delta_{\alpha+1}^{\binom{\alpha}{\alpha-1}} \ldots \delta_n^{\binom{n-1}{\alpha-1}}]^{\frac{1}{\binom{n}{\alpha}}} \to v(E, \Phi).$$

Soit ε un nombre positif quelconque et $p_1, \ldots, p_n$ un système de $n > \alpha$ points de E pour lequel

$$\Delta_n < \min_{(k)} \Delta_k(p_1, \ldots, p_n) + \varepsilon.$$

La différence $\Delta_n - \varepsilon$ est, quel que soit $k=1,2,\ldots,n-1$, plus petite que le produit (3) et celui est égal à

$$\prod_{\substack{1\leqslant i_2<\ldots<i_\alpha\leqslant n-1 \\ (i_\nu \neq k)}} \Phi(p_k, p_{i_2}, p_{i_3}, \ldots, p_{i_\alpha}) \cdot \prod_{\substack{1\leqslant i_3<\ldots<i_\alpha\leqslant n-1 \\ (i_\nu \neq k)}} \Phi(p_k, p_n, p_{i_3}, \ldots, p_{i_\alpha})$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$\Delta_n - \varepsilon < \{\min_{(k)} \Delta_k(p_1, \ldots, p_{n-1}\} \cdot \prod_{\substack{1\leqslant i_3<\ldots<i_\alpha\leqslant n-1 \\ (i_k \neq k)}} \Phi(p_k, p_n, p_{i_3}, \ldots, p_{i_\alpha}).$$

Le dernier produit contient $\binom{n-2}{\alpha-2}$ facteurs Φ; en désignant par c le maximum de la fonction $\Phi(p_1, \ldots, p_\alpha)$ lorsque les points $p_1, \ldots, p_\alpha$ varient dans E on tire de l'inégalité précédente

$$\Delta_n - \varepsilon < \Delta_{n-1} \cdot c^{\binom{n-2}{\alpha-2}}$$

et comme ε est arbitrairement petit

$$\Delta_n \leqslant \Delta_{n-1} \cdot c^{\binom{n-2}{\alpha-2}},$$

d'où l'on tire

(15) $$\delta_n \leqslant \delta_{n-1}^{r_{n-1}} \cdot c^{1-r_{n-1}},$$

où

(16) $$r_n = \frac{n-\alpha+1}{n} < 1 \qquad \text{car } \alpha \geqslant 2.$$

Or, il résulte de (12), (14) et (15) que la limite $\lim \delta_n$ existe et que

(17) $$\lim_{n\to\infty} \delta_n = v(E, \Phi)$$

en vertu du lemme suivant:

3. Lemme: *Si une suite $\{a_n\}$ à termes positifs remplit les conditions*

1° $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant v$,

2° $v_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \to v$,

3° $a_{n+1} \leqslant a_n^{r_n} \cdot c^{1-r_n}, \qquad n=1,2,\ldots,$

où $r_n=(n-a)/n$, $a\geqslant 1$, $c>0$ *et* $v\geqslant 0$ *sont des constantes* [1]), *alors la suite* $\{a_n\}$ *est convergente et tend vers* v.

Démonstration du lemme. Posons

$$\alpha=\liminf a_n\leqslant\limsup a_n=\beta$$

et désignons par $R_{n,k}$ le produit $r_n\cdot r_{n+1}\ldots r_{n+k}$. Étant

$$R_{n,k}=\frac{n-a}{n}\cdot\frac{n+1-a}{n+1}\cdots\frac{n+k-a}{n+k}\qquad\text{pour } k\geqslant 0,$$

d'où l'on tire

$$R_{n,k}=\frac{n-a}{n-a+k+1}\cdot\frac{n-a+1}{n-a+k+2}\cdots\frac{n-1}{n+k}\qquad\text{pour } k\geqslant a,$$

on voit que

$$\lim_{n\to\infty}R_{n,k}=1\quad\text{et}\quad\lim_{k\to\infty}R_{n,k}=0.$$

De l'hypothèse 3° on tire

$$a_{n+2}\leqslant a_{n+1}^{r_{n+1}}\cdot c^{1-r_{n+1}}\leqslant a_n^{R_{n,1}}\cdot c^{1-R_{n,1}},$$
$$a_{n+3}\leqslant a_{n+2}^{r_{n+2}}\cdot c^{1-r_{n+2}}\leqslant a_n^{R_{n,2}}\cdot c^{1-R_{n,2}}$$

et généralement

$$a_{n+k+1}\leqslant a_n^{R_{n,k}}\cdot c^{1-R_{n,k}},\qquad k=0,1,\ldots,\tag{18}$$

d'où l'on déduit, en faisant tendre k vers l'infini, $\beta\leqslant c$.

Supposons qu'on ait $\alpha<\beta$ et soit ε un nombre remplissant les conditions $0<\varepsilon<c-\alpha$. D'autre part, soit $m_1,m_2,\ldots$ une suite croissante d'indices tels qu'on ait

$$a_n<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\qquad\text{pour } n=m_1,m_2,\ldots$$

D'après (18) on a quel que soit $k=0,1,\ldots$

$$a_{n+k+1}<\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{R_{n,k}}\cdot c^{1-R_{n,k}}\qquad\text{pour } n=m_1,m_2,\ldots$$

et puisque

$$R_{n,k}>\left(\frac{n-a}{n-a+k+1}\right)^a=\bar{R}_{n,k}$$

---

[1]) a étant un nombre entier.

et que $\alpha+\frac{\varepsilon}{2}<\alpha+\varepsilon<c$ on a quel que soit k

(19) $$a_{n+k+1}<\left(\frac{\alpha+\varepsilon/2}{c}\right)^{\bar{R}_{n,k}}\cdot c \qquad \text{pour } n=m_1, m_2, \ldots$$

Le membre droit de cette inégalité est plus petit que $\alpha+\varepsilon$ lorsque n est grand (k étant fixe); d'autre part, il est plus grand que $\alpha+\varepsilon$ lorsque k est grand car il tend vers c lorsque $k\to\infty$. Désignons par

$$k(n) \qquad \text{pour } n=m_1, m_2, \ldots$$

la plus grande valeur de k pour laquelle le membre droit de (19) ne surpasse pas $\alpha+\varepsilon$. Par suite

$$\left(\frac{n-a}{n-a+k(n)+1}\right)^{a}\log\frac{\alpha+\varepsilon/2}{c}\leqslant\log\frac{\alpha+\varepsilon}{c}$$

d'où

$$\frac{n-a}{n-a+k(n)+1}\geqslant\sqrt[a]{\frac{\log c-\log(\alpha+\varepsilon)}{\log c-\log(\alpha+\varepsilon/2)}}.$$

Désignons par η le membre droit de la dernière inégalité. On a $0<\eta<1$ et

$$(n-a)\frac{1-\eta}{\eta}-2\leqslant k(n)\leqslant(n-a)\frac{1-\eta}{\eta}-1$$

d'où l'on tire

(20) $$\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}=\frac{1-\eta}{\eta}, \qquad \text{où } n=m_1, m_2, \ldots$$

Considérons maintenant les termes

$$v_{n+k}=\sqrt[n+k]{a_1\cdot a_2\ldots a_{n+k}}=$$
$$=\left(\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}\right)^{\frac{n}{n+k}}\cdot(a_{n+1}\cdot a_{n+2}\ldots a_{n+k})^{\frac{1}{n+k}},$$

où $n=m_1, m_2, \ldots$ et $k=k(n)$. D'après ce qui précède les termes $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}$ ne surpassent pas $\alpha+\varepsilon$ donc

(21) $$v_{n+k}\leqslant v_n^{\frac{n}{n+k}}(\alpha+\varepsilon)^{\frac{k}{n+k}}, \qquad \text{où } k=k(n).$$

En faisant tendre n vers l'infini par les valeurs $m_1, m_2, \ldots$ on tire de (20) et (21) et de l'hypothèse 2°

$$v\leqslant v^{\eta}(\alpha+\varepsilon)^{1-\eta}$$

ce qui entraîne l'inégalité $v \leqslant \alpha + \varepsilon$. Mais, il suit de l'hypothèse 1° que $\beta \leqslant v$ donc $\beta \leqslant \alpha + \varepsilon$ et comme ε est arbitrairement petit on a $\alpha = \beta$.

D'autre part, il suit de 2° que

$$\alpha = \beta = v$$

donc le lemme est démontré.

4. La fonction $v(E,\Phi)$ constitue une généralisation des certaines constantes liées aux ensembles.

Supposons que l'espace R soit le plan et que $\Phi(p_1,p_2)$ soit égal à la distance cartesienne des points p_1 et p_2; alors $v(E,\Phi)$ se réduit au *diamètre transfini* de l'ensemble E introduit par M. Fekete [Math. Zeitschrift, t. 17 (1923), p. 228—249]. Dans le cas où R est l'espace à 3 dimensions et

$$\Phi(p_1,p_2) = e^{-\frac{1}{|p_1 p_2|}}$$

où $|p_1 p_2|$ est la distance des points p_1 et p_2, on a

$$v(E,\Phi) = e^{-\frac{1}{d(E)}}$$

où $d(E)$ est le diamètre transfini introduit par MM. G. Polya et G. Szegö [Journal für Math., t. 165 (1931), p. 4—49].

Soit maintenant R l'espace de deux variables réelles ou complexes, p_1 et p_2 deux points de cet espace et

$$\Phi(p_1,p_2) = \text{la valeur absolue de } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \end{vmatrix},$$

où x_i, y_i sont les coordonnées de p_i; alors $v(E,\Phi)$ se réduit à l'*écart* de l'ensemble E par rapport à l'origine des coordonnées [2]). Cette dernière constante joue un rôle important dans l'étude des séries des polynomes homogènes de deux variables:

$$\Sigma P_n(x,y) = \Sigma(a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + a_{0,n}y^n).$$

---

[2]) C. R. Paris, t. 197 (1933), p. 21—22 et Bulletin de l'Acad. Polon., Sc. mathém., Cracovie 1933, p. 453—461.

SINGULAR ELLIPTIC-PARABOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

By W. J. TRJITZINSKY (Urbana, U. S. A.)

1. Introduction. Parabolic partial differential equations, even the „regular" boundary value problems related to such equations, have been investigated rather incompletely. Not all the different varietes of parabolic equations appear to be of equal importance. Thus, the field of hyperbolic parabolic equations (practically undeveloped) appears to be less important than that of equations of normal parabolic type and of *elliptic parabolic type.* Regarding classification of differential equations

$$L(u)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f$$

(a_{ij}, b_i, c, f functions of $x_1,\dots,x_n$ in a domain D)

of parabolic type in the three indicated subtypes, the reader is referred to a work by N. PISCOUNOV [1]), in which there is developed a theory of regular boundary value problems for elliptic parabolic equations of the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{i=1}^{m} a_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+c\frac{\partial u}{\partial x}+bu+f$$

(a_i, c, b, f functions of $y_1,\dots,y_m,x$),

---

[1]) N. Piscounov, *Problèmes limite pour les équations du type elliptico-parabolique.* Recueil Mathématique, t. 7 (49), N. 3 (1940); pp. 385—424; this referred as (P).

and it has been indicated that the results obtained can be extended to the general elliptic parabolic equation. The problem treated in (P) is „regular" from our point of view, because the boundary S of D has been assumed subject to certain conditions of regularity, while the coefficients of the equation, together with an appropriate number of their derivatives, have been assumed continuous in $D+S$. It is of interest to note that regular problems of such type have previously occurred in a number of developments (on Brownian movements) due to KOLMOGOROFF (see references in (P)).

We shall study elliptic-parabolic equations

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,y)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \tag{1.1}$$
$$+ \sum_{i=m+1}^{n} b_i(x,y)\frac{\partial u}{\partial y_i} + c(x,y)u = f(x,y).$$

Here the coefficients are functions of

$$x=(x_1,\dots,x_m), \quad y=(y_{m+1},\dots,y_n)$$

$(n>m\geqslant 3)$, *defined for* (x,y) *in a bounded n-dimensional domain* D:

$$x \text{ in } B, \quad c_{1j}\leqslant y_j \leqslant c_{2j} \qquad (j=m+1,\dots,n),$$

$(c_{1j}<c_{2j})$, *where* B *is an m-dimensional domain. The boundary of* B *is allowed to be irregular. The operator*

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

is assumed elliptic, in x, *for* x *in* B *(when* $c_{1j}\leqslant y_j\leqslant c_{2j}$*).* The boundary of D will be designated as

$$S=C+P_1+P_2,$$

where P_1, P_2 denote the portions of the boundary consisting of points (x,y) for which

$$y_j=c_{1j}, \quad y_j=c_{2j}$$

$(j=m+1,\dots,n)$, respectively; C is the „cylindrical" part of the boundary of S; P_1, P_2 are the „flat ends" of D.

The coefficients involved in (1.1) (f *included*), *the first order partials of the* b_i *and the first and second order partials of the* a_{ij} *are assumed to be continuous in* $D + P_1 + P_2$; *these coefficients and the mentioned derivatives may become infinite near* C. *It is the latter circumstance that makes our problem singular* (the coefficients are not even defined on C).

We arrange to have $\text{Det.} \, |(a_{ij})| = 1$.

In the Fundamental Theorem 4.31 it is established that (1.1) can be transformed into a regular integral equation of the first kind, provided

$$(1.2) \qquad \int_D^{(n)} |f(x, y)| \, dx \, dy < \infty .$$

This equation is obtained by dividing the integral equation (3.8) by a suitable regularizing function, which we obtain explicitly.

The results of the present work can be easily adapted to the case when the condition (1.2) is deleted (see the Note at the end of section 4).

In section 5 we study problems of closure in connection with the integral equation of the Fundamental Theorem.

In section 6 (Theorem 6.23), with the aid of a different method, the equation (1.1) is transformed into an integral equation, in appearance of the second kind (but in general irregular).

In section 7 (Theorems 7.20, 7.21) explicit conditions are found (relating to the orders of infinitude near C of the coefficients and of the previously indicated derivatives) under which the integral equation of section 6 is a regular Fredholm equation (after a suitable number of iterations).

It may seem paradoxical that (1.1) can be transformed into a regular integral first kind equation without any conditions in addition to those stated explicitly subsequent to (1.1), while additional conditions appear necessary when in transforming (1.1) into a second kind integral equation we wish the latter to be a regular Fredholm equation. This is due to the fact that regularity of an integral equation of the first kind means much less than regularity of an integral equation

of the second kind — the equations of the first kind being more difficult than those of the second.

Our present work is somewhat analogous to our previous investigation of singular elliptic and normal hyperbolic partial differential equations [2]), *in the sequel referred to as* (T_1). In (T_1) the singular elliptic case has been treated rather completely, while the more difficult hyperbolic case — less so; in the self adjoint case the study of these problems, as given in (T_1), has been facilitated by the use of orthonormal sequences of characteristic functions, arising from suitable approximating boundary value problems; in the present work we lack similar sequences.

In these pages we shall also make use of our earlier work [3]), *in the sequel refered to as* (T_2).

We shall finally remark that the results of the present investigation can be easily adapted to equations of purely elliptic type, when we let $n=m$.

Incidentally, *section* 2 *of our work* (T_1) *is to be replaced by the following result.*

Given a kernel $K(x,z)=w(x,z)r^{-\alpha}(x,z)$ [x,z points in a bounded m-dimensional domain $B(0<\alpha<m)$], with $r(x,z)=$ distance between x,z and

$$\omega_\nu(x,z)=|w^q(x,z)|^{[\nu+1]}$$

[the latter superscript denoting the ν-th iterant of $|w^q(x,z)|$ over B] existing for some $q>(m-\alpha)^{-1}m$ and for ν equal the least integer $>(m/p-\alpha)^{-1}\alpha$ $(1/p=1-1/q)$, then the ν-th iterant $K_\nu(x,z)$ of $K(x,z)$ will satisfy

$$|K_\nu(x,z)|<c\,\omega_\nu^{1/q}(x,z) \text{ (some constant } c).$$

The above result has been made use of in proving the Fundamental Theorem 4.23 *of* (T_1), *as formulated in* (T_1); it is also the above version of section 2 of (T_1) that is involved in the developments of the present paper.

---

[2]) W. J. Trjitzinsky, *Singular elliptic and hyperbolic partial differential equations.* Recueil Mathématique, t. 20, N. 3 (1947), p. 365—430.

[3]) W. J. Trjitzinsky, *Analytic theory of singular elliptic partial differential equations.* Annals of Math.; vol. 43, No 1 (1942) pp. 1—55.

2. Preliminaries. Consider the operator

$$L(u) \equiv E(u) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,y)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=m+1}^{n} b_i(x,y)\frac{\partial u}{\partial y_i} + c(x,y)u, \tag{2.1}$$

where

$$E(u) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (a_{ij} = a_{ji}). \tag{2.1 a}$$

Of importance will be the quadratic form

$$A(x,y;p) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,y)p_i p_j, \tag{2.2}$$

definite for (x,y) in D.

The adjoint of $L(u)$ is

$$\begin{aligned} L'(v) &\equiv E'(v) - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) - \sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}(b_i v) + cv, \\ E'(v) &= \sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}v). \end{aligned} \tag{2.3}$$

We shall use the function $\Gamma(x,z;y)$, as in (T_2; pp. 4—5), the function previously introduced by J. HADAMARD for hyperbolic equations; cf. reference in (T_2). $\Gamma(x,z;y)$ is the square of the geodesic distance related to the quadratic differential form

$$H(x,y;dx) = \sum_{i,j=1}^{m} h_{ij}(x,y)\,dx_i\,dx_j, \tag{2.4}$$

where $h_{ij}(x,y)$ is the element in the i-th row and j-th column of the inverse of the matrix $(a_{ij}(x,y))$ $(i,j=1,...,m)$; that is,

$$(h_{ij}(x,y)) = (a_{ij}(x,y))^{-1}. \tag{2.4 a}$$

With z, x denoting any two fixed suitably near points in B we have

$$\sqrt{\Gamma(x,z;y)} = \int_{C(y)} \sqrt{H(x,y;dx)}\,; \tag{2.5^0}$$

here $C(y) = C(x,z;y)$ is the geodesic, joining z and x; $C(y)$ is the curve for which the first variation of

$$\int_z^x \sqrt{H(x,y;dx)}$$

vanishes. For the geodesic through z one has the equations

$$\text{(2.5)}\qquad \begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_i} A(x,y;p) = \sum_\nu a_{i\nu}(x,y)\, p_\nu\,, \\ \frac{dp_i}{ds} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} A(x,y;p) = -\frac{1}{2}\sum_{\nu,\varkappa} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{\nu\varkappa}(x,y)\, p_\nu\, p_\varkappa\,, \end{aligned}$$

under the conditions

$$\text{(2.5 a)}\qquad \begin{gathered} x_i = z_i \ (\text{for } s=0), \quad p_i = p_{0i} \ (\text{for } s=0), \\ v_0 = p_{01}^2 + \ldots + p_{0m}^2 \neq 0\,. \end{gathered}$$

For a geodesic arc $C(x,z;y)$, with x,z fixed, the p_{0i} will depend on x,z,y. Along a given geodesic the forms

$$A(x,y;p), \quad H(x,y;\dot{x})$$

($\dot{x}_j = dx_j/ds$; from (2.5)) are constant. $\Gamma(x,z;y)$ is expressible as follows:

$$\text{(2.6)}\qquad \begin{aligned} \Gamma(x,z;y) &= A(z,y;q) = s^2 A(z,y;p_0) \\ &= s^2 A(x,y;p) = s^2 H(z,y;\dot{x}(0)) = s^2 H(x,y;\dot{x}); \end{aligned}$$

here

$$q_j = s p_{0j}; \quad p_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0m});$$

for x suitably near z one has

$$\text{(2.6 a)}\qquad \Gamma(x,z;y) = \sum_{i,j=1}^m h_{ij}(z,y)\,(x_i - z_i)\,(x_j - z_j) + \ldots,$$

with the principal part displayed; $\Gamma(x,z;y)$ is symmetric in x,z.

If S is a surface in D, the transversal derivative with respect to S is defined as

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dv} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{dy_j}{dv}\,,$$

where

$$\frac{dx_i}{d\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{m} a_{i\varkappa}(x,y)\,\pi_\varkappa, \quad \frac{dy_j}{d\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{m} a_{j\varkappa}(x,y)\,\pi_\varkappa = 0 \quad (j>m),$$

the π_i denoting direction cosines of the normal to S; one has

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,\varkappa=1}^{m} a_{i\varkappa}(x,y)\,\pi_i \frac{\partial u}{\partial x_\varkappa}. \tag{2.7}$$

Accordingly, *the transversal direction is at right angles to each of the y_j-axes.* A transversal direction cannot be defined on any surface lying in the manifold $y_j = \text{const.}$ $(j=m+1,\dots,n)$; however, on such a surface

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \tag{2.8}$$

(on such a surface $\pi_1 = \dots = \pi_m = 0$).

With z fixed in B, let $D^\varrho(z)$ be a domain containing all the points (z,y) (for $c_{1j} \leqslant y_j \leqslant c_{2j}$) and consisting of the interior of the surface $S^\varrho(z)$, lying in D, consisting of portions $P_1^\varrho(z)$, $P_2^\varrho(z)$ of the boundary of D for which

$$y_j = c_{1j}\ (j>m), \quad y_j = c_{2j}\ (j>m), \tag{2.9}$$

respectively, and of a portion $C^\varrho(z)$ of the surface

$$\Gamma(x,z;y) - \varrho^2 = 0. \tag{2.9 a}$$

Here $\varrho = \varrho(z)$, >0, is independent of y and is to be taken sufficiently small (a more precise statement in the sequel).

As a consequence of (2.8)

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\Gamma(x,z;y) = 0 \quad (\text{on } P_1^\varrho(z), P^\varrho(z)). \tag{2.10}$$

For the direction cosines $\pi_1,\dots,\pi_m$ on $C^\varrho(z)$ one has

$$\pi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x,z;y)\frac{1}{a(x,z;y)} \qquad (i=1,\dots,m), \tag{2.11}$$

$$\pi_j = \frac{\partial}{\partial y_j}\Gamma(x,z;y)\frac{1}{a(x,z;y)}, \quad a^2(x,z;y) = \sum\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)^2 + \sum\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y_j}\right)^2$$

($a>0$ for the inner normal). The $\pi_j (j>m)$ do not matter; in fact, by (2.7) and (2.11)

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\Gamma(x,z;y)=\frac{1}{\alpha}\sum_{i,\varkappa} a_{i\varkappa}(x,y)\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_\varkappa}=\frac{4}{\alpha}\Gamma(x,z;y) \tag{2.12}$$

$$(\text{on } C^\varrho(z))$$

inasmuch as it is known that

$$A(x,y;\,\partial\Gamma/\partial x)=4\Gamma(x,z;y).$$

Thus, when μ is a constant,

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\Gamma^\mu(x,z;y)=\frac{4\mu}{\alpha}\Gamma^\mu(x,z;y) \qquad (\text{on } C^\varrho(z)). \tag{2.13}$$

3. The transformation. The fundamental formula for L, L' (cf. (2.1), (2.3)) is

$$\begin{aligned}&\overset{(n)}{\int}(vL(u)-uL'(v))\,dx\,dy=-\\ &-\overset{(n-1)}{\int}\left[v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}+luv\right]dS(x,y)\end{aligned} \tag{3.1}$$

[$dx=dx_1\ldots dx_m$; $dy=dy_{m+1}\ldots dy_n$; $dS(x,y)=$ element of surface];

the superscripts in (3.1) indicate the dimensionality of the integrals; the first integral displayed is over a connected n-dimensional region (within D), the second is over the surface (assumed to be suitably smooth) bounding the domain;

$$l=\sum_{i=1}^{n}\pi_i b_i-\sum_{i,\varkappa=1}^{m}\pi_i\frac{\partial a_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}; \tag{3.1 a}$$

here the π_i are the direction cosines of the inner normal; the formula is valid for any functions u,v regular in the domain and on its boundary.

Suppose u is a solution in D of

$$L(u)=f(x,y), \tag{3.2}$$

regular in D and on P_1, P_2, but not necessarily on C; near C u may become infinite. We arrange to have

$$\text{Det.}\,|(a_{ij})| = 1. \tag{3.2'}$$

We apply (3.1), with the domain $D^\varrho(z)$ and this function u; v is as yet undefined. One has

$$\int\limits_{D^\varrho(z)} (vf - uL'(v))\, dx\, dy = Q^\varrho, \tag{3.3}$$

where

$$Q^\varrho = -\int\limits_{S^\varrho(z)} \left[v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} + l\,u\,v \right] dS(x,y). \tag{3.3 a}$$

We let

$$v_0(x,z;y) = [1 - \varrho^{-2}\Gamma(xz;y)]^2; \quad v_0 = 0 \qquad (\text{for } \Gamma > \varrho^2). \tag{3.4}$$

As a consequence of (2.9 a)

$$v_0(x,y;z) = \frac{\partial}{\partial \nu} v_0(x,z;y) = 0 \qquad (\text{on } C^\varrho(z)) \tag{i$_0$}$$

(derivation with respect to x). By (2.8)

$$\frac{\partial}{\partial \nu} v_0(x,z;y) = 0 \qquad (\text{on } P_1^\varrho(z),\, P_2^\varrho(z)). \tag{ii$_0$}$$

We define $v(x,z;y)$ as

$$v(x,z;y) = v_0(x,z;y)\,p(y), \tag{3.5}$$

where

$$p(y) = \prod_{j>m} (y_j - c_{1j})(c_{2j} - y_j); \tag{3.6}$$

$$p(y) = 0 \quad (\text{on } P_1^\varrho(z), P_2^\varrho(z)); \quad p(y) \geqslant 0.$$

By (3.5), (i$_0$), (ii$_0$) it is inferred that

$$\frac{\partial}{\partial \nu} v(x,z;y) = 0 = v(x,z;y) \qquad (\text{on } S^\varrho(z)). \tag{3.6'}$$

In view of (3.4) $v = 0$ for $\Gamma > \varrho^2$. One has

$$Q^\varrho = 0. \tag{3.7}$$

Thus *the postulated solution* u *of* $L(u)=f$ *satisfies the first kind integral equation*

$$\int_D^{(n)} u(x,y)K(x,y;z)\,dx\,dy = f^*(z),$$

(3.8)

$$f^*(z) = \int_D^{(n)} f(x,y)\,v(x,z;y)\,dx\,dy,$$

where

(3.8 a) $\quad K(x,y;z) = L'_x\, v(x,z;y) \quad (\textit{for } (x,y) \textit{ in } D^{\varrho}(z)),$

$$K(x,y;z) = 0 \quad (\textit{for } (x,y) \textit{ in } D - D^{\varrho}(z)),$$

(3.8 b) $\quad v(x,z;y) =$ *the function* (3.5) [cf. (3.4), (3.6)]

for (x,y) *in* $D^{\varrho}(z)$; $\quad v(x,z;y)=0 \quad$ *for* (x,y) *in* $D-D^{\varrho}(z)$.

$K(x,y;z)$ is regular in D and on P_1, P_2; however, $K(x,y;z)$ may become infinite in the neighborhood of the „cylindrical" component C of the boundary of D. In the sequel we shall give explicit steps for regularizing the integral equation (3.8).

We shall now look into the converse of the statement (3.8)—(3.8 b). For (x,y) in $D^{\varrho}(z)$ one has

$$0 \leqslant \Gamma(x,z;y)\,\varrho^{-2}(z) \leqslant 1.$$

Whence in view of (3.4)

$$0 \leqslant v_0(x,z;y) \leqslant 1 \quad ((x,y) \text{ in } D^{\varrho}(z)).$$

Thus, by (3.5), (3.6),

(3.9) $$0 \leqslant v(x,z;y) \leqslant p(y) \quad ((x,y) \text{ in } D^{\varrho}(z))$$

and

$$\int_D^{(n)} v^2(x,z;y)\,dx\,dy < \infty.$$

Accordingly $v(x,z;y)$ has an orthonormal „base"; that is, there exists an orthonormal sequence

(3.10) $$\Psi_1(x,y), \quad \Psi_2(x,y), \ldots$$

so that

$$\int_D^{(n)} \Psi_\nu(x,y)\, v(x,z;y)\, dx\, dy = 0 \qquad (\nu = 1,2,\dots) \tag{3.11}$$

and that every solution Ψ, with integrable square in D, of the equation

$$\int_D^{(n)} \Psi(x,y)\, v(x,z;y)\, dx\, dy = 0$$

is expressible in the form

$$\Psi(x,y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \Psi_\nu(x,y) \tag{3.12}$$

(some constants c_ν, with $c_1^2 + c_2^2 + \dots$ convergent); *here and in the sequel* $\sim$ *denotes convergence in the mean square in* (x,y).

Suppose now u *is a function satisfying the integral equation* (3.8) *and with the first and second partials continuous in* $D + P_1 + P_2$ *(*C *possibly excepted).* Define g by the relation

$$g = L(u).$$

In (3.1) (for $D^\varrho(z)$) we substitute this function u and for v the function (3.8 b); by (3.6′) one obtains

$$\int_{D^\varrho(z)}^{(n)} (vL(u) - uL'(v))\, dx\, dy = 0$$

and, in view of (3.8 a),

$$\int_D^{(n)} u(x,y) K(x,y;z)\, dx\, dy = \int_D^{(n)} g(x,y)\, v(x,z;y)\, dx\, dy.$$

By hypothesis the first member here is $f^*(z)$. Thus, as a consequence of the definition of $f(x,y)$ in (3.8),

$$\int_D^{(n)} [g(x,y) - f(x,y)]\, v(x,z;y)\, dx\, dy = 0.$$

By virtue of the statement (3.12) and provided $f(x,y) \subset L_2$ in (x,y),

$$g(x,y) - f(x,y) \sim \sum c_\nu \Psi_\nu(x,y) \quad (c_1^2 + c_2^2 + \dots < \infty).$$

We may therefore assert the following. *Every solution u of the integral equation* (3.8), *as stated in the italics subsequent* (3.12), *satisfies the differential equation*

$$L(u) = f + h, \tag{3.13}$$

where

$$\int_D^{(n)} h(x,y)\, v(x,z;y)\, dx\, dy = 0; \tag{3.13 a}$$

if $L(u) - f$ is of integrable square over D, we have

$$h \sim \sum_\nu c_\nu \Psi_\nu ,$$

the Ψ_ν being from the orthonormal base (3.10).

4. The Fundamental Theorem. In view of (3.8 a), (2.3) and (3.5), (3.6)

$$K(x,y;z) = p \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} (a_{ij} v_0) - p \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i v_0) + c p v_0 - \\ - \sum_{i>m} \frac{\partial}{\partial y_i} (b_i v_0 p);$$

since

$$\frac{\partial p}{\partial y_i} = p\, p_i , \quad p_i = \frac{(c_{1i} + c_{2i}) - 2 y_i}{(y_i - c_{1i})(c_{2i} - y_i)}, \tag{4.1}$$

one has

$$K(x,y;z) \frac{1}{p(y)} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} (a_{ij} v_0) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i v_0) - \\ - \sum_{i>m} \frac{\partial}{\partial y_i} (b_i v_0) + \left[c - \sum_{i>m} b_i p_i \right] v_0 ;$$

accordingly

$$K(x,y;z) \frac{1}{p(y)} = \sum_{i,j} a_{ji} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b'_i \frac{\partial v_0}{\partial x_i} + \\ + \sum_{i>m} b'_i \frac{\partial v_0}{\partial y_i} + c' v_0 , \tag{4.2}$$

where

(4.2 a)
$$b'_i = -b_i + 2\sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \quad (a_{ij} = 0 \text{ for } i > m),$$
$$c' = \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} - \sum_{i>m} \frac{\partial b_i}{\partial y_i} + c - \sum_{i>m} b_i p_i .$$

We define $R(x,z)$ as the Euclidean distance between x and z, while $d(z)$ will denote the distance from z (z in B) to the frontier of B; we shall frequently use the designation C_z for the n-dimensional „cylinder" consisting of points (x,y) such that (with z in B)

$$\left\{R(x,z) \leqslant \frac{d(z)}{2}; \quad c_{1j} \leqslant y_j \leqslant c_{2j}; \quad j = m+1, \ldots, n\right\}.$$

By a reasoning of type used in the sequel in connection with (6.5), (6.5 a) we assert the following. *Without any loss of generality it is arranged to have* Det $|(a_{ij}(x,y))| = 1$, *while the $b_i(x,y)\,(i > m)$ vanish at the „ends" P_1, P_2 of D sufficiently fast so that, for some function $B_0(z)$, independent of x, y, one has*

(4.2 b) $|b_i(x,y)\, p_i(y)| \leqslant B_0(z)$ [$i > m$; *for (x,y) in C_z and z in B*].

On writing

(4.3)
$$r = \varrho^{-2}\Gamma, \quad r_i = \varrho^{-2} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \quad (i \leqslant m),$$
$$r_j = \varrho^{-2} \frac{\partial \Gamma}{\partial y_j} \;\; (j > m), \quad r_{ij} = \varrho^{-2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j},$$

we obtain

(4.3 a)
$$v_0 = (1-r)^2, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x_i} = -2(1-r)\, r_i ,$$
$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_i \partial x_j} = -2(1-r)\, r_{ij} + 2 r_i r_j ;$$

consequently by (4.2)

(4.4)
$$K(x,y;z)\frac{1}{p(y)} = -2(1-r)\sum_{i,j} a_{ij} r_{ij} + \sum_{i,j} 2a_{ij} r_i r -$$
$$-2(1-r)\sum_{i=1}^{n} b'_i r_i + c'(1-r)^2 ;$$

since $4\Gamma = A(x, y; \partial\Gamma/\partial x)$, one has

$$\sum_{i,j} a_{ij} r_i r_j = 4\varrho^{-4}\Gamma = 4\varrho^{-2} r. \tag{4.4 a}$$

Notation 5.4. *Here and in the sequel c^* will be a generic designation for a positive constant (independent of the parametric variables y_j), At times c^* will be supposed suitably small, at other times — suitably large; whichever is the case will be apparent from the context.*

We let a_0, b'_0, c'_0 be functions defined in B such that the a_{ij}, b'_i, c', involved (4.2 a), *satisfy*

$$\begin{gathered} |a_{ij}(x,y)| \leqslant a_0(z), \quad |b'_i(x,y)| \leqslant b'_0(z), \\ |c'(x,y)| \leqslant c'_0(z) \quad (x,y) \text{ in } C_z;\ z \text{ in } (B); \end{gathered} \tag{4.5 a}$$

we let r', r'' be functions of $(x,y;z)$ so that

$$|r_i| \leqslant r', \quad |r_{ij}| \leqslant r'' \quad (\text{for } (xy) \text{ in } D^\varrho(z);\ z \text{ in } B). \tag{4.5 b}$$

We shall always choose $a_0(z) \geqslant 1$.

In the sequel we shall elaborate on r', r'' and shall specify ϱ as a positive function of z.

We observe that for (x,y) in $D^\varrho(z)$ one has

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant 1 - r \leqslant 1.$$

Thus, in view of (4.4), (4.4 a)

$$|K(x,y;z)| \frac{1}{p(y)} \leqslant 2m^2 a_0 r'' + 2n b'_0 r'_0 + c'_0 + 8\varrho^{-2} r \tag{4.6}$$

for (x,y) in $D^\varrho(z)$ and z in B; since $K(x,y;z) = 0$ for (x,y) in $D - D^\varrho(z)$, (4.6) will hold for (x,y) in D, z in B.

On taking account of section 2 we obtain

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Gamma(x,z;y) = 2h_{ij}(z,y) + \Lambda_{ij}(x,z,y), \tag{4.7}$$

where $\Lambda_{ij}(x,z,y) \to 0$ with $R(x,z)$. We write

$$a_{ij}(x,y) = a_{ij}(z,y) + \tilde{a}_{ij},$$

where

$$|\bar{a}_{ij}| \leqslant \tilde{a} \quad (\tilde{a} \text{ to be specified in the sequel}),$$

and note that by (4.7), (4.3)

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,y)\, r_{ij} = \varrho^{-2}\Big[2m + 2\omega(x,y,z) + \sum_{i,j} a_{ij}(x,y)\, \Lambda_{ij}\Big],$$

with

$$\omega(x,y,z) = \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij}\, h_{ij}(z,y).$$

Substituting this in (4.4) we obtain

(4.4′) $$K(x,y;z)\frac{1}{p(y)} + 4(m+\omega)(1-r)\,\varrho^{-2} = \text{second member in (4.4)},$$

with r_{ij} replaced by $\bar{r}_{ij}$, where

(4.7 a) $$\bar{r}_{ij} = \Lambda_{ij}\, \varrho^{-2}.$$

We adjoin to (4.5 b) a function $\bar{r}''$ so that

(4.5 b′) $$|\bar{r}_{ij}| \leqslant \bar{r}'' \quad (\text{for } (x,y) \text{ in } D^{\varrho}(z);\ z \text{ in } B).$$

Thus in place of (4.6) it is inferred that

(4.6′) $$\left| K(x,y;z)\frac{1}{p(y)} + 4(m+\omega)(1-r)\,\varrho^{-2} \right| \leqslant \leqslant 2m^2 a_0 \bar{r}'' + 2n\, b_0' r' + c_0' + 8\varrho^{-2} r.$$

We shall now adapt some of the results in sections 3, 4 of author's work (T_1) *to the study of* ω, ϱ, Γ *and of the first and second partials of* Γ.

Applying $(T_1$; sections 3,4), we replace the A_{ij} of (T_1) by the $a_{ij}(x,y)$, thinking of $y_{m+1}, \dots, y_n$ as parameters, fixed throughout the discussion.

Notation 4.8. We write (in agreement with (T_1))

4 .8 a) $$0 < \mu(z) = l \cdot b \cdot A(z,y;\pi),$$
$$0 < \underline{\mu}(z) = l \cdot b \cdot \sum \Big[\sum_{\beta} a_{j\beta}(z,y)\, \pi_{\beta}\Big]^2,$$

where the bounds are independent of y and are taken subject to the condition $\pi_1^2+\ldots+\pi_m^2=1$;

(4.8 b) $u_3(z)=c^*\{a_0^2(z)\,a_1(z)+[a_0(z)\,a_1^2(z)+a_0^2(z)a_2(z)]\,d(z)\}$,

(4.8 c) $a(z)=u\cdot b\cdot|a_{ij}(z,y)|,\quad a_s(z)=u\cdot b\cdot\left|\dfrac{\partial^s}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}}a_{ij}(x,y)\right|$

(for (x,y) in C_z and z in B; $s=0,1,2$).

Offhand it is not clear that positive $\mu(z)$, $\underline{\mu}(z)$ independent of y exist so that (4.8 a) holds. This matter is settled affirmatively with the aid of (T_1) (cf. (4.14), below). Theorem 3.7 in (T_1) yields

Theorem 4.9. *One has*

(4.9 a) $$0<\delta_0(z)\leqslant\frac{R(x,z)}{\sqrt{\Gamma(x,z;y)}}\leqslant\delta(z)$$

for z in B and for (x,y) in $L^{\varrho}(z)$, that is for

(4.9 b) $\sqrt{\Gamma(x,z;)y}\leqslant\varrho(z),\quad c_{1j}\leqslant y_j\leqslant c_{2j}\quad(j=m+1,\ldots,n)$,

where

(4.9 c) $$\delta_0^2(z)=c^*\frac{\underline{\mu}(z)}{a(z)},\quad \delta^2(z)=\frac{c^*}{\mu(z)}[a_0^2(z)+\underline{\mu}(z)]$$

and $\varrho(z)$ is any function such that

(4.9 d) $$0<\varrho(z)<c^*\frac{\mu^{1/2}(z)}{a_1(z)},\quad c^*\frac{\mu^{1/2}(z)\,\underline{\mu}(z)}{u_3(z)},\quad c^*\frac{\mu^{1/2}(z)d\,(z)}{\sqrt{a_0^2(z)+\underline{\mu}(z)}};$$

furthermore, $L^{\varrho}(z)$ lies in the „cylinder"

$$C_z\{R(x,z)\leqslant d(z)/2;\ c_{1j}\leqslant y_j\leqslant c_{2j}\}$$

and one has

(4.9 e) $$\textit{Cylinder}\,\{R(x,z)\leqslant\delta_0(z)\varrho(z);\quad c_{1j}\leqslant y_j\leqslant c_{2j}\}\subset D^{\varrho}(z)$$
$$\subset\textit{Cylinder}\,\{R(x,z)\leqslant\delta(z)\varrho(z);\quad c_{1j}\leqslant y_j\leqslant c_{2j}\}.$$

Adapting the Corollary 3.9 (T_1) to the present case, by following its proof we observe that the conclusion of, the

Corollary holds, with $\bar{c}$ involved in the conclusion of the form c^*. Thus one has

Corollary 4.10. *With the lower (upper) bounds in Theorem 4.9 denoting not necessarily the greatest lower (least upper) bounds, choose μ, $\underline{\mu}$, a_0, a_1 so that*

$$(4.10\,\mathrm{a}) \qquad \underline{\mu}(z) \leqslant 1, \quad \mu(z) \leqslant 1, \quad a_0(z) \geqslant 1, \quad a_1(z) \geqslant \frac{1}{d(z)}\,.$$

Then $\varrho(z)$ of the Theorem may be chosen as

$$(4.10\,\mathrm{b}) \quad \varrho(z) = c^* \mu^{1/2}(z)\, \underline{\mu}(z) \frac{1}{\tau(z)}\,, \quad \tau = a_0^2 a_1 + a_0 a_1^2 d + a_0^2 a_2 d.$$

As a consequence of (4.10) of (T_1)

$$(4.11) \qquad \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x,z;y) \right| \leqslant g_1(z)\, R(x,z), \quad g_1 = 4\mu^{-1/2}\delta_0^{-1}$$

for (x,y) in $D^{\varrho}(z)$; thus, in agreement with (4.3) (4.5 b) *one may take*

$$(4.12) \qquad r' = \varrho^{-2}(z)\, g_1(z) R(x,z).$$

In accordance with Lemma 4.19 of (T_1) *we choose μ, $\underline{\mu}$ as*

$$(4.13) \qquad \mu(z) = \gamma\, a_0^{-m+1}(z), \quad \gamma = c^*;$$

$$(4.14) \qquad \underline{\mu}(z) = \underline{\gamma}\, a_0^{-2m+2}(z), \quad \underline{\gamma} = c^*;$$

c^* suitably small.

Comparing ($\bar{1}$), subsequent (T_1; (4.16 b)), with (4.7) and noting that $H_{ij}(z)$ of (T_1) is $h_{ij}(z,y)$, we obtain

$$A_{ij} = 2g_{ij}\, s\,.$$

Thus, in view of (4.7 a)

$$|\bar{r}_{ij}| = |2g_{ij}\, s\, \varrho^{-2}|\,;$$

on the other hand, by (T_1; (4.21))

$$|g_{ij}| \leqslant g_0(z) \quad [x \text{ in } L^{\varrho}(z);\, g_0 \text{ from (4.21 a) of } (T_1)];$$

whence, with (4.5 b′) in view, one may write

$$(4.15 \qquad \bar{r}'' = 2\varrho^{-2} g_0(z)\, s\,.$$

Here by (4.21 a), (4.21 b) of (T_1) we may take

(4.16) $$g_0(z) = c^* \{a_0^{m-1} a_1 + a_0^{m-1} a_1^2 \bar{s} + (a_2 + a_1) e^{2m\varkappa'(z)\bar{s}} \cdot$$
$$\cdot [a_0^{m-1} + (a_0 + \varrho_0 \bar{s})^{2m-2} \varrho_0 \bar{s}] + a_0^m \varrho_0 (a_0 + \varrho_0 \bar{s})^{2m-2} (1 + a_1 \bar{s})\},$$

where

(4.16 a) $$\varrho_0 = c^* e^{2m\varkappa'(z)\bar{s}} (a_0 a_2 + a_1^2 + a_0 a_1).$$

In order to see the truth of the above one would have to go through the details of the corresponding developments in (T_1), adapting them to the present situation—especially, the presence of the „parameters" y_j. The details in this connection will be omitted.

As a consequence of Lemma 5.6 of (T_1) one has

Lemma 4.17. *For $\bar{s} = \bar{s}(z)$ a possible choice is any function such that*

(4.17 a) $$0 < \bar{s} \leqq \frac{c_1}{a_0}, \quad \frac{c_1 d}{a_0}, \quad \frac{c_1}{a_1}, \quad \frac{c_1}{a_2}, \quad s_1, \; s_2,$$

where

(4.17 b) $$s_1 = \frac{c_2 a_0^{1-2m}}{a_0 a_1 + (a_1^2 + a_0 a_2) d}, \quad s_2 = \frac{c_3 a_0^{1-m}}{a_0 a_2 + a_1^2 + a_1 a_0};$$

also $\varrho(z)$ may be chosen as any function such that

(4.17 c) $$0 < \varrho(z) \leqq c_4 a_0^{1/2 - 1/2 m} \bar{s}.$$

Here $c_1, \ldots, c_4$ are of type c^*, suitably small.

We shall trace the lines of proof of (T_1; Lemma 5.6) in order to prove the above.

As in (T_1; (5.3)) we introduce

$$B = 2m\, \varkappa'(z);$$

on recalling (T_1; (4.11)),

$$\varkappa'(z) \geqq 2m\, a_1 v_0^{1/2}, a_0, 2m^2 v_0 a_2,$$

we observe that one may choose

(α_1) $$\varkappa' = c_5(a_0 + a_1 + a_2), \quad B = c_6(a_0 + a_1 + a_2),$$

where c_5, c_6 are of type c^*, suitably great. We take c_1 in (4.17 b) with the desired property and shall justify such a choice in the sequel; by (α_1) one then has

$$(\alpha_2)\quad \exp.(B\bar{s}) = \exp.[c_6\bar{s}(a_0 + a_1 + a_2)] \leqslant \exp.(3c_1c_6) = h = c^*.$$

It then follows that the condition (T_1; (5.3)) for $\bar{s}$ is satisfied if

$$A\,\bar{s}\,h(a_0 + A\,\bar{s}\,h)^{m-1} \leqslant \frac{1}{2m(m!)},$$

where

$$A = 3m^3(m\,a_0\,a_2\,v_0 + m\,a_1^2\,v_0 + a_1\,a_0\,v_0^{1/2}).$$

By [T_1; (4^0), subsequent (5.6 c)] this inequality is seen to hold if $\bar{s}$ is subject to the condition

$$(\alpha_3)\qquad \bar{s} \leqslant c_7\,a_0^{1-m}\,A^{-1}.$$

On examining the derivation of (T_1; (4^0)) it is observed that one may choose $c_7 = c^*$. Now $\bar{s}$ must also satisfy (T_1; (5^0)). The first of these inequalities holds by (4.17 a) if we take

$$(\alpha_4)\qquad c_1 \leqslant \frac{1}{m^3}\,v_0^{-1/2};$$

one may take $c_1 = c^*$. By (4.8 d)

$$(\alpha_5)\qquad u_3 \leqslant c_8[a_0^2\,a_1 + (a_0\,a_1^2 + a_0^2\,a_2)\,d], \qquad c_8 = c^*.$$

The second inequality (T_1; (5^0)) is

$$\bar{s} \leqslant 3v_0^{-1/2}\,\underline{\mu}\,u_3^{-1};$$

in view of (α_5) and (4.14) it is satisfied if

$$\bar{s} \leqslant \left(\frac{3}{c_8}\,v_0^{-1/2}\,\underline{\gamma}\right)\frac{a_0^{-2m+2}}{a_0^2\,a_1 + (a_0\,a_1^2 + a_0^2\,a_2)\,d};$$

that is, it is satisfied as a consequence of the inequality

$$\bar{s} \leqslant s_1 \quad (s_1 \text{ from (4.17 b)})$$

of Lemma 4.17, provided c_2 involved in (4.17 b) is chosen so that

$$(\alpha_6)\qquad c_2 \leqslant \frac{1}{c_8}\,3v_0^{-1/2}\,\underline{\gamma}\,.$$

By (4.14) the third inequality (T_1; (5^0)) is

$$\bar{s} \leqslant \tfrac{1}{2} d\, v_0^{-1/2} [m^3 a_0^2 + \tfrac{1}{2} \underline{\gamma}\, a_0^{-2m+2}]^{-1/2}.$$

Since $a_0 \geqslant 1$, this will be satisfied by virtue of the second inequality (4.17 a), provided

$$(a_7) \qquad c_1 \leqslant \tfrac{1}{2} v_0^{-1/2} (m^3 + \tfrac{1}{2} \underline{\gamma})^{-1/2}.$$

This will secure the third (the last) inequality (T_1; (5^0)). We now turn to (a_3). By the formula for (A) (preceding (a_3)) one has

$$A \leqslant h'(a_0 a_2 + a_1^2 + a_1 a_0), \qquad h' = c^*.$$

Therefore (a_3) holds if

$$\bar{s} \leqslant c_7 h' \frac{a_0^{1-m}}{a_0 a_2 + a_1^2 + a_1 a_2},$$

that is, if in (4.17 b) one takes

$$(a_8) \qquad c_3 \leqslant c_7 h'.$$

We now come to (4.17 c). It is observed that in addition to (4.9 d) ϱ is to satisfy (T_1; (5.1)),

$$(a_9) \qquad \varrho \leqslant \mu^{1/2} v_0^{1/2} \bar{s} \quad (\bar{s} \text{ from } (4.17\text{ a})).$$

In view of (a_5) and (4.14) it is noted that (4.9 d) holds, provided

$$(a_{10}) \quad \varrho \leqslant \gamma' \frac{a_0^{1/2-m/2}}{a_1}, \quad \gamma'' \frac{a_0^{3/2-5m/2}}{a_0 a_1 + (a_1^2 + a_0 a_2)\, \bar{d}}, \quad \gamma''' a_0^{-m/2-1/2} d$$
$$(\gamma', \gamma'', \gamma''' \text{ of type } c^*).$$

In view of (4.14) the inequality (a_9) is satisfied as a consequence of (4.17 c), provided one takes

$$(a_{11}) \qquad 0 < c_4 \leqslant v_0^{1/2} \gamma^{1/2}.$$

By virtue of (4.17 c) the first inequality (a_{10}) will be secured if

$$\bar{s} \leqslant \frac{\gamma'}{c_4} \frac{1}{a_1};$$

that is, if c_1 in (4.17 a) is subject to the additional condition

$$(\alpha_{12}) \qquad c_1 \leqslant \frac{\gamma'}{c_4}.$$

We observe that (4.17 c) implies the second inequality (α_{10}), provided

$$\bar{s} \leqslant \frac{\gamma''}{c_4} s_1 \quad \text{(cf. (4.17 b))};$$

thus in (4.17 a), (4.17 b) it will suffice to choose

$$(\alpha_{13}) \qquad c_2 \leqslant \frac{\gamma''}{c_4}.$$

The last inequality (α_{10}) will hold if

$$\bar{s} \leqslant \frac{\gamma'''}{c_4} \frac{d}{a_0};$$

in other words, if in (4.17 a) one takes

$$(\alpha_{14}) \qquad c_1 \leqslant \frac{\gamma'''}{c_4}.$$

The above considerations establish that $c_1, \ldots, c_4$ in Lemma 4.17 can be chosen of type c^*, suitably small.

By (4.16 a) and (α_2) one may take

$$\varrho_0 \leqslant c^{(5)} [a_0 a_2 + a_1^2 + a_0 a_1];$$

in view of (4.17 b), (4.17 a)

$$\varrho_0 \bar{s} \leqslant c^{(5)} c_3 a_0^{1-m} \left(\frac{\bar{s}}{s_2}\right) \leqslant \bar{c}^{(5)} a_0^{1-m} \leqslant h';$$

thus, under Lemma 4.17,

$$a_1 \bar{s} \leqslant c_1, \quad e^{2m\varkappa' \bar{s}} \leqslant h, \quad a_0 + \varrho_0 \bar{s} \leqslant h_1 a_0;$$

here $c^{(5)}$, $\bar{c}^{(5)}$, h', h_1 (as well as h) are of type c^*. With the aid of the above formulas from (4.16) we obtain without difficulty

$$(4.18) \qquad g_0 \leqslant c' a_0^{3m-2} (a_0 a_2 + a_1^2 + a_0 a_1), \qquad c' = c^*.$$

By [T_1; $(\bar{2})$, preceding (4.17)]

$|\tilde{a}_{ij}| = |a_{ij}(x,y) - a_{ij}(z,y)| \leqslant \bar{a}(z)\,\bar{s} = 2m^2 v_0^{1/2} a_0(z)\, a_1(z)\,\bar{s} \leqslant \tilde{c}\; a_0\, a_1\,\bar{s}$

(for (x,y) in $D^{\varrho}(z)$; z in B), where $\tilde{c} = c^*$. Thus for the function $\omega(x,y,z)$, introduced preceding (4.4′), one has

$$|\,\omega(x,y,z)\,| \leqslant m^2\,\tilde{c}\, a_0\, a_1\,\bar{s}\, h_0(z),$$

where $h_0(z)$ is from (T_1; (4.18)),

$$|\,h_{ij}(z)\,| \leqslant h_0(z) = c^0\, a_0^{m-1}(z) \qquad (c^0 = (m-1)!);$$

whence

$$|\,\omega(x,y,z)\,| \leqslant c^{(0)}\, a_0^{m}\, a_1 \bar{s}\,, \qquad c^{(0)} = c^*;$$

since $\bar{s}\, a_0/d \leqslant c_1$ (cf. (4.17 a)), we thus obtain

$$|\,\omega(x,y,z)\,| \leqslant c^{(1)}\, a_0^{m-1}\, a_1 d, \qquad c^{(1)} = c^*. \tag{4.19}$$

By (4.9 c) and (4.14)

$$\frac{1}{c_0^2} = c^*\alpha(z)\, a_0^{2m-2};$$

hence, in view of (4.11), (4.14)

$$g_1 = c^*\, \alpha^{1/2}\, a_0^{3m/2-3/2}$$

and, in consequence of (4.12), for r' one may take

$$r' = \varrho^{-2}\, c^*\, \alpha^{1/2}\, a_0^{3/2\,m-3/2} R(x,z).$$

Now, by (4.9 e)

$$R(x,z) \leqslant \delta(z)\,\varrho(z) \quad (\text{for } (x,y) \text{ in } D^{\varrho}(z));$$

whence r' may be given as

$$\varrho^{-1}\, c^*\, \alpha^{1/2}\, a_0^{3/2\,m-3/2}\,\delta.$$

Now, by (4.9 c), (4.14) we may choose for δ

$$\delta = c^*\, a_0^{m/2+1/2};$$

accordingly, one may take $\varrho r'$ as

$$c^*\, \alpha^{1/2}\, a_0^{2m-1}.$$

Using (4.17 c) for ϱ and the inequality

$$\frac{\bar{s}\,a_0}{d} \leqslant c_1 \quad (\text{cf. } (4.17\,\text{a})),$$

as an admissible choice we obtain

$$(4.20) \qquad \varrho^2 r' = c^* a^{1/2} a_0^{3/2 m-1} d \leqslant c^* a_0^{3/2 m - 3/2} d$$

(we note that $a \leqslant a_0$). From (4.15), (4.18) it follows that

$$\varrho^2 \bar{r}'' < c^* a_0^{3m-2} (a_0 a_2 + a_1^2 + a_0 a_1) s;$$

now $a_0 s \leqslant a_0 \bar{s} \leqslant c_1 d$ (cf. (4.17 a)); thus

$$(4.21) \qquad \varrho^2 \bar{r}'' < c^* a_0^{3m-3} (a_0 a_2 + a_1^2 + a_0 a_1) d.$$

By (3.6) and (4.1)

$$(4.22) \qquad |p_i(y)| < p_0'(y),$$

where

$$(4.22\text{ a}) \qquad p_0'(y) = c^* \sum_{j>m} |y_j - c_{1j}|^{-1} |y_j - c_{2j}|^{-1};$$

moreover,

$$0 \leqslant p(y) \leqslant c^*.$$

By (4.2 b) for B_0 one may take a function such that, for $i > m$,

$$(4.22\text{ b}) \qquad |b_i(x,y)\, p_0'(y)| < B_0(z) \quad [(x,y) \text{ in } C_z;\ z \text{ in } B].$$

Notation 4.23. Let b_0, b_1, c_0 be chosen so that

$$(4.23\text{ a}) \qquad |b_i(x,y)| \leqslant b_0(z), \quad \left|\frac{\partial b_i(x,y)}{\partial x_i}\right| \leqslant b_1(z),$$

$$\left|\frac{\partial b_i(x,y)}{\partial y_i}\right| \leqslant b_1(z), \quad |c(x,y)| \leqslant c_0(z) \qquad [i=1,\dots,n;\ (x,y) \text{ in } C_z].$$

For b_0' of (4.5 a), as a consequence of (4.2 a, b) and (4.22), one may take

$$(4.24) \qquad \begin{aligned} b_0'(z) &= c^*(b_0(z) + a_1(z)), \\ c_0'(z) &= c^*(a_2(z) + b_1(z) + c_0(z) + B_0(z)). \end{aligned}$$

Since by (4.17 a)

$$\bar{s}^2 a_0^2 \leqslant c^* d^2,$$

from (4.17 c) we obtain

$$\varrho^2(z) \leqslant c^* a_0^{-1-m}(z)\, d^2(z). \tag{4.25}$$

By virtue of (4.6′)

$$K(x,y;z)\,\varrho^2(z) = -4(m+\omega)\,p(y)\,(1-r) + w(x,y,z), \tag{4.26}$$

where

$$|w(x,y,z)| \leqslant c^*[a_0 \bar{r}'' \varrho^2 + b_0' r' \varrho^2 + c_0' \varrho^2 + 1]\, p(y).$$

As a consequence of (4.21), (4.20) and (4.25)

$$\begin{aligned} |w(x,y,z)| &< c^* \{a_0^{3m-2}(a_0 a_2 + a_1^2 + a_0 a_1)\, d\} + \\ &+ b_0'(z)\, a_0^{3m/2-1} d + c_0'(z) a_0^{-1-m} d^2(z) + 1\} = c^* w_0(z). \end{aligned} \tag{4.27}$$

In view of (4.19) the first term in the second member in (4.26) does not exceed

$$c^* w^0(z) = c^*(a_0^{m-1} a_1\, d + 1). \tag{4.27 a}$$

Thus

$$|K(x,y;z)\,\varrho^2(z)| < c^*(w^0(z) + w_0(z)). \tag{4.26′}$$

By (3.9)

$$0 \leqslant v(x,z;y) < c^*;$$

hence $f^*(z)$ *in* (3.8) *satisfies*

$$|f^*(z)| < c^*, \tag{4.28}$$

under the supposition (which we make) that $|f(x,y)|$ *is integrable over* D. Since $v(x,z;y) = 0$ in $D - D^\varrho(z)$ and hence in $D - C_z$, *one has*

$$|f^*(z)| < c^* \int_{C_z}^{(n)} |f(x,y)|\, dx\, dy = f_0(z) \tag{4.28 a}$$

for z *in* B, *even if*

$$\int_D^{(n)} |f(x,y)|\, dx\, dy = \infty.$$

In order to regularize the kernel in the integral equation (3.8), we multiply (3.8) by

$$\varrho^2(z)\,(w^0(z)+w_0(z))^{-1},$$

obtaining

$$\int\limits_D^{(n)} u(x,y)\,T(x,y;z)\,dx\,dy = F(z), \tag{4.29}$$

where

$$T(x,y;z) = \frac{K(x,y;z)\,\varrho^2(z)}{w^0(z)+w_0(z)}, \tag{4.29 a}$$

$$F(z) = \frac{f^*(z)\,\varrho^2(z)}{w^0(z)+w_0(z)}. \tag{4.29 b}$$

In fact, by (4.26′) $|T(x,y;z)|$ satisfies

$$|T(x,y;z)| < c^* \quad ((x,y) \text{ in } D;\ z \text{ in } B). \tag{4.30}$$

On the other hand, by (4.28), (4.25)

$$|F(z)| < c^* F_0(z) = c^* \frac{a_0^{-1-m}\,d^2}{w^0+w_0},$$

where (by (4.27), (4.27 a)) one may take

$$F_0(z) = a_0^{-1-m} d^2 N^{-1}(z), \quad N(z) = a_0^{m-1} a_1 d +$$
$$+ a_0^{3m-2} d(a_0 a_2 + a_1^2 + a_0 a_1) + b_0' a_0^{3m/2-1} d + c_0' a_0^{-1-m} d^2 + 2 \geqslant 2,$$

that is,

$$|F(z)| < c^* a_0^{1-m} d^2 < c^* d^2(z) < c^*; \tag{4.30 a}$$

accordingly $F(z)$, too, is bounded in D.

The Fundamental Theorem 4.31. *The integral equation* (3.8), *related to the differential problem* $L(u)=f$ ($|f|$ *integrable over* D), *can be written in the form of a regular integral equation of the first kind*

$$\int\limits_D^{(n)} u(x,y)\,T(x,y;z)\,dx\,dy = F(z)$$

(cf. (4.29 a), (4.29 b) *and* (4.26), (4.25), (4.27), (4.27 a), (4.28)), *where the kernel* $T(x,y;z)$ *and the function* $F(z)$ *can be effectively constructed.*

Note. A corresponding result, when $\int_D |f|\,dx\,dy = \infty$, can be formulated on the basis of the considerations which led to the above Theorem and of (4.28 a).

5. Properties of closure. We shall use following definitions.

Definition 5.1. *It will be said that $u(x,y)$ is of class R if u, $L(u)$, $L'(u)$ are continuous in D and in every closed subset of the portions P_1, P_2 on the boundary S of D.*

If $u \subset R$, then u, $L(u)$, $L'(u)$ are continuous in the closed set $D^{\varrho}(z) + S^{\varrho}(z)$. When $u \subset R$ the following integrals exist:

$$(5.1\ \mathrm{a}) \quad \int_D L(u)\, v(x,z;y)\, dx\,dy, \quad \int_D u(x,y)\, L'_{x,y}(v(x,z;y))\, dx\,dy,$$

$$(5.1\ \mathrm{b}) \quad \int_D L'(u)\, v(x,z;y)\, dx\,dy, \quad \int_D u(x,y)\, L_{x,y}(v(x,z;y))\, dx\,dy.$$

Definition 5.2. *It will be said that „u is a left solution R (or some other class) of $K(x,y;z)$", if $u \subset R$ and*

$$\int_D u(x,y)\, K(x,y;z)\, dx\,dy = 0,$$

or, „u is a solution R of $v(x,y;z)$", if $u \subset R$ and

$$\int_D u(x,y)\, v(x,z;y)\, dx\,dy = 0.$$

Suppose $u \subset R$; with $v(x,z;y)$ defined by (3.5), the second member in (3.1) will vanish; we thus obtain

$$(5.3) \quad \int_D L(u(x,y))\, v(x,z;y)\, dx\,dy = \int_D u(x,y)\, L'_{x,y}(v(x,z;y))\, dx\,dy$$

(the integrals are those from (5.1 a)). In this connection (as well as in (5.1 a), (5.1 b)) we make use of the fact that $v(x,z;y)$ has been defined as zero for (x,y) in $D - D^{\varrho}(z)$, the same being true of

$$(5.4) \quad K(x,y;z) = L'_{x,y}(v(x,z;y)), \quad K'(x,y;z) = L_{x,y}(v(x,z;y));$$

for a fixed z (in B) the functions (5.4) have absolute values uniformly bounded for (x,y) in $D^{\varrho}(z)$.

We have determined v on the basis of the operator L; however, actually v depends only on the coefficients of the second order partials in L; the coefficients of such partials in L' are correspondingly the same; hence the function v is the same for the operators L, L'. With u of class R, in (3.1) we interchange u and v; the second member in (3.1) will become

$$(5.5) \qquad -\overset{(n-1)}{\int}\left[u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}+l u v\right] d S,$$

where the integral is over the boundary S^{ϱ} of $D^{\varrho}(z)$. As a consequence of (3.6′) the expression (5.5) is zero. Thus

$$(5.6) \quad \int_D L'(u(x,y))\, v(x,z;y)\, dx\, dy = \int_D u(x,y) L_{x,y}(v(x,z;y))\, dx\, dy$$

(the integrals are those of (5.1 b)); that is, *for u of class R (5.3) continues to hold when the operators L, L' are interchanged.*

As a consequence of (5.3) the following is concluded.

(5.7). *If $\Psi(x,y)$ is a solution of v and u, of class R, satisfies $L(u)=\Psi$, then u is a left solution R of $L'_{x,y}(v(x,z;y))$ $[=K(x\,y;z)]$.*

(5.7 a). *If u is a left solution R of $L'_{x,y}(v(x,z;y))$, then $L(u)$ is a solution of $v(x,z;y)$.*

In view of (5.6) one obtains the following.

(5.8). *If $\Psi(x,y)$ is a solution of v and u, of class R, satisfies $L'(u)=\Psi$, then u is a left solution R of $L_{x,y}(v(x,z;y))$ $[=K'(x,y;z)]$.*

(5.8 a). *If u is a left solution R of $L_{x,y}(v(x,z;y))$, then $L'(u)$ is a solution of $v(x,z;y)$.*

Definition 5.9. An expression like „*$K(x,y;z)$ is closed R on the left*" is to mean that every $u(x,y)$ of class R satisfying

$$\int_D u(x,y)\, K(x,y;z)\, dx\, dy = 0$$

is necessarily zero.

We introduce *the class R^* of functions Ψ for which*

$$L(u) = \Psi \tag{5.10}$$

is satisfied by a function u of class R (necessarily any such Ψ is continuous in D and in every closed subset of P_1, P_2). The expression „*$v(x,z;y)$ is not closed R^**" will mean that there exists a function $\Psi(x,y) \subset R^*$, not identically zero and such that

$$\int_D \Psi(x,y)\, v(x,z;y)\, dx\, dy = 0. \tag{5.10 a}$$

We can now prove

(5.11). *If $v(x,z;y)$ is not closed R^*, then $K(x,y;z)$ is not left closed R.*

In fact, suppose (5.11) is not true; thus assume $K(x,y;z)$ is left closed R. Since $v(x,y;z)$ is not closed R^*, there exists a function $\Psi(x,y)$, $\subset R^*$ and $\not\equiv 0$, so that (5.10 a) holds. Let u be a function of class R satisfying $L(u) = \Psi$ (such a function exists by the definition of R^*). By (5.7) it will follow that u is a left solution R of $K(x,y;z)$, and is thus zero; accordingly $\Psi = L(u) = 0$, which presents a contradiction. This proves (5.11).

(5.12). *Suppose L is closed R (this is construed to mean that the equation $L(u) = 0$ has no solutions u, $\subset R$ and $\not\equiv 0$); if v is closed R^*, then $K(x,y;z)$ is left closed R.*

If the above is not true, then $K(x,y;z)$ is not left closed R. There will exist a function u, $\subset R$ and $\not\equiv 0$, so that

$$\int_D u(x,y)\, K(x,y;z)\, dx\, dy = 0.$$

Then by (5.7 a) it is inferred that $L(u)$ is a solution of $v(x,z;y)$. We observe that $L(u) \subset R^*$ (since $u \subset R$). Since v is closed R^*, it is concluded that $L(u) = 0$. This involves a contradiction inasmuch as L is closed R and $u \not\equiv 0$. Hence (5.12) holds.

(5.13). *If v is closed R^* and $K(x,y;z)$ is not left closed R, then $L(u) = 0$ has a solution u, $\subset R$ and $\not\equiv 0$.*

In fact, by hypothesis there exists a function u, $\subset R^*$, $\not\equiv 0$, which is a left solution of $K(x,y;z)$; by (5.7 a) $L(u)$, $\subset R^*$, will

be a solution of v; hence $L(u)=0$ and the conclusion in (5.13) is seen to hold.

(5.14). *If L is not closed R, then $K(x,y;z)$ is not left closed R.*

If this statement is false, then K is left closed R. Since L is not closed R, there exists a function u, $\subset R$ and $\not\equiv 0$, so that $L(u)=0$. We substitute u in (5.3) obtaining

$$\int_D u(x,y)\,K(x,y;z)\,dx\,dy=0.$$

Inasmuch as K is left closed R one should have $u=0$; thus we arrive at a contradiction, proving (5.14).

A corollary to (5.14) is

(5.15). *If $K(x,y;z)$ is left closed R, then L is closed R.*

In fact, if (5.15) is not true, then L is not closed R; the hypothesis of (5.14) will hold and, by (5.14), $K(x,y;z)$ will have to be not left closed R, contrary to a hypothesis in (5.15).

By (5.11) we conclude that

(5.16). *If $K(x,y;z)$ is left closed R, then $v(x,z;y)$ is closed R^*.*

As a consequence of (5.12) we have

(5.17). *If $K(x,y;z)$ is not left closed R and L is closed R, then $v(x,z;y)$ is not closed R^*.*

The results (5.11)—(5.17) have been obtained on the basis of the relation (5.3). With the aid of (5.6), on interchanging L, L' (accordingly replacing L in the definition of R^* in (5.10) by L') and on taking note of the notation (5.4) we correspondingly obtain the following.

If $v(x,z;y)$ is not closed R^*, then $K'(x,y;z)$ is not left closed R.

If $K'(x,y;z)$ is left closed R, then $v(x,z;y)$ is closed R^*.

If $v(x,z;y)$ is closed R^* and L' is closed R, then $K'(x,y;z)$ is left closed R.

If $v(x,z;y)$ is closed R^* and $K'(x,y;z)$ is not left closed R, then L' is not closed R.

If $K'(x,y;z)$ is not left closed R and L' is closed R, then $v(x,z;y)$ is not closed R^*.

If L' is not closed R, then $K'(x,y;z)$ is not left closed R.

If K' $(x,y;z)$ is left closed R, then L' is closed R.

Definition 5.18. $K^{(r)}$ *will denote the class of functions* u *continuous in* B *(not including the boundary of* B*) for which the integral*

$$\int_B^{(m)} K(x,y;z)\,u(z)\,dz$$

exists. $T^{(r)}$ *will be the class of functions* $w(z)$ *such that* $\lambda(z)\,w(z) \subset K^{(r)}$. *Here*

$$\lambda(z) = \frac{\varrho^2(z)}{w^0(z)+w_0(z)} \text{ (cf. (4.29 a), (4.27), (4.27 a)).} \tag{5.19}$$

Suppose $K(x,y;z)$ is right closed $K^{(r)}$; that is

$$\int_B K(x,y;z)\,u(z)\,dz = 0, \quad u(z) \subset K^{(r)}, \tag{5.20}$$

implies $u \equiv 0$. We recall that

$$T(x,y;z) = K(x,y;z)\,\lambda(z). \tag{5.21}$$

Hence for $w(z) \subset T^{(r)}$ the integral

$$\int_B T(x,y;z)\,w(z)\,dz = \int_B K(x,y;z)\,[\lambda(z)\,w(z)]\,dz$$

exists, inasmuch as $\lambda(z)\,w(z) \subset K^{(r)}$. If w, $\subset T^{(r)}$, is a right solution of $T(x,y;z)$, we shall have

$$\int_B K(x,y;z)\,u(z)\,dz = 0,$$

where $u = \lambda w \subset K^{(r)}$; accordingly, by (5.20) u and, hence, w will be zero; thus $T(x,y;z)$ will be right closed $T^{(r)}$.

Conversely, suppose now that $T(x,y;z)$ is right closed $T^{(r)}$. The relations

$$\int_B T(x,y;z)\,w(z)\,dz = 0, \quad w(z) \subset T^{(r)}, \tag{5.22}$$

will imply $w \equiv 0$. We observe that when $u \subset K^{(r)}$, $u(z)/\lambda(z) \subset T^{(r)}$. If u, $\subset K^{(r)}$, is a right solution of $K(x,y;z)$ we have

$$0 = \int_B K(x,y;z)\,u(z)\,dz = \int_B T(x,y;z)\,w(z)\,dz,$$

where $w(z) = u(z)/\lambda(z) \subset T^{(r)}$. Hence by (5.22) $w = 0$; thus $u = 0$ and $K(x,y;z)$ is right closed $K^{(r)}$.

(5.23). The following has been proved.

(5.23). *If $K(x,y;z)$ is right closed $K^{(r)}$, then $T(x,y;z)$ is right closed $T^{(r)}$ and conversely* (Definition 5.18).

Right closure of $T(x,y;z)$ is necessary in order that the integral equation be soluble in one sense or another. Incidentally, we observe that *the class of functions $T^{(r)}$ is identical with the class of functions u, continuous in B and such that $|T(x,y;z)\,u(z)|\,dz$ is integrable over B.* Since, by (4.30), $|T(x,y;z)|$ is uniformly bounded for (x,y) in D and z in B, we conclude that $T^{(r)}$ contains all functions, continuous in B and having absolute values integrable over B; $T^{(r)}$ may contain some other functions.

With integrability meant in the absolute sense, we introduce

Definition 5.24. *$R(L)$ is to denote the class of functions u, together with $L(u)$ continuous and integrable over D. R^0 will be the designation for functions continuous and integrable over B.*

Since $v(x,z;y)\,\lambda(z)$ ($\geqslant 0$; λ from (5.19)) is bounded, it is inferred that the integral

$$\overset{(m)}{\int_B} v(x,y;z)\,\lambda(z)\,|w(z)|\,dz$$

exists and represents a bounded function of (x,y) (in D) for all $w \subset R^0$. Accordingly the repeated integral

$$\overset{(n)}{\int_D}\Big[\overset{(m)}{\int_B} v(x,y;z)\,\lambda(z)\,|\,w(z)\,|\,dz\Big]\,|\,L(u(x,y))\,|\,(dx\,dy)$$

exists whenever $u(x,y) \subset R(L)$. It therefore follows that, for $w \subset R^0$ and $u \subset R(L)$, the order of integration in

$$\overset{(n)}{\int_D}\overset{(m)}{\int_B} L(u(x,y))\,v(x,z;y)\,\lambda(z)\,w(z)\,(dx\,dy)\,dz \tag{5.25}$$

is immaterial. Since $T(x,y;z) = K(x,y;z)\lambda(z)$ is of bounded absolute value, the integral

$$\int_B^{(m)} |K(x,y;z)| \cdot \lambda(z) \cdot |w(z)|\, dz$$

exists and is bounded when $w \subset R^0$. Consequently the repeated integral

$$\int_D^{(n)} \Big[\int_B^{(m)} |K(x,y;z)| \cdot \lambda(z) \cdot |w(z)|\, dz\Big] |u(x,y)|\, dx\, dy$$

exists for $u \subset R(L)$ and $w \subset R^0$. Thus the order of integration in

(5.25 a) $$\int_D^{(n)} \int_B^{(m)} u(x,y) K(x,y;z) \lambda(z) w(z) (dx\, dy)\, dz$$

is interchangeable whenever $u \subset R(L)$, $w \subset R^0$.

Multiplying the two members of (5.3) by $\lambda(z) w(z) dz$ and integrating over B, on taking account of the assertions (5.25), (5.25 a) for $u \subset R(L)$, $w \subset R^0$, we obtain

(5.26) $$\nu_1 = \nu_2,$$

where

$$\nu_1 = \int_D^{(n)} L(u(x,y)) \Big[\int_B^{(m)} v(x,z;y) \lambda(z) w(z)\, dz\Big] dx\, dy,$$

$$\nu_2 = \int_D^{(n)} \Big[\int_B^{(m)} T(x,y;z) w(z)\, dz\Big] u(x,y)\, dx\, dy.$$

Suppose $T(x,y;z)$ is not right closed R^0. There exists then a function $w(z)$, $\subset R^0$ and $\not\equiv 0$, so that

$$\int_B^{(m)} T(x,y;z) w(z)\, dz = 0.$$

For this w by (5.26) one has

$$\int_D^{(n)} L(u(x,y)) \Big[\int_B^{(m)} v(x,z;y) \lambda(z) w(z)\, dz\Big] dx\, dy = 0$$

for all $u(x,y) \subset R(L)$. As a consequence of this we have

$$\int_B^{(m)} v(x,z;y)\lambda(z)\,w(z)\,dz = 0\,.$$

The latter relation is impossible if $v(x,z;y)\lambda(z)$ is right closed R^0. (We say „$v\lambda$ is right closed R^0", if the preceding equality, with $w(z) \subset R^0$, implies $w(z) \equiv 0$). We have established

Theorem 5.27. *If* $v(x,z;y)\lambda(z)$ *is right closed* R^0 (Definition (5.24)) *then* $T(x,y;z)$ *is right closed* R^0.

6. An elliptic transformation. In the sequel the following notation will be used

$$(6.1)\qquad \begin{gathered}(x_1,\dots,x_m)=x,\quad (z_1,\dots,z_m)=z,\quad (y_{m+1},\dots,y_n)=y,\\ (\eta_{m+1},\dots,\eta_n)=\eta;\quad (x_1,\dots,x_m,y_{m+1},\dots,y_n)=(x,y);\\ dx=dx_1,\dots,dx_m,\quad \text{etc.}\end{gathered}$$

We write

$$(6.2)\qquad L(u)=L_m(u)+\sum_{i>m} b_i\frac{\partial u}{\partial y_i},\quad L_m(u)=E(u)+{\sum_{i=1}^{m}}' b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu.$$

In the operator L_m derivations are with respect to $x_1,\dots,x_m$ only; the y_j will be now regarded as parameters. The adjoint $L'_m(v)$ of $L_m(v)$ is $L'(v)$, as defined in (2.3), with the b_j $(j>m)$ deleted, that is

$$(6.3)\qquad L'_m(v)=E'(v)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v)+cv\,.$$

The nonhomogeneous equation $L(u)=f$, where the character of f will be specified later, may be written in the form

$$(6.4)\qquad L_m(u)=f_m(x,y),$$

with

$$(6.4\text{ a})\qquad f_m(x,y)=f(x,y)-\sum_{j>m} b_j(x,y)\frac{\partial u}{\partial y_j}\,.$$

As remarked previously, when $(x_1,\dots,x_m)$ is in the m-dimensional domain B and the y_j are on the intervals (c_{1j},c_{2j}),

respectively, (x,y) will be in D. Conversely, for (x,y) in D x will be in B and the y_j will be on the intervals (c_{1j}, c_{2j}).

Now, the differential operator in the first member in (6.4) is an elliptic one for x in B. The a_{ij}, b_i, c are continuous at the ends P_1, P_2 (cf. section 1) of D. *Without any essential loss of generality we assume that*

$$\text{(6.5)} \qquad \text{Det.}\,|(a_{ij})| = 1 \quad (\textit{in } D)$$

and that for $j = m+1, \ldots, n$

$$\text{(6.5 a)} \qquad b_j(x,y) = 0 \quad (\textit{for } y_i = c_{1i}, \quad \textit{for } y_i = c_{2i}; \quad i = m+1, \ldots, n).$$

In fact, if (6.5) did not hold we may proceed as follows. We replace c_{1i}, c_{2i} by c'_{1i}, c'_{2i}, respectively, so that

$$c'_{1i} < c_{1i}; \quad c_{2i} < c'_{2i},$$

and replace D by D', where D' consists of points x,y such that $x = (x_1, \ldots, x_m)$ is in B and $c'_{1j} \leq y_j \leq c'_{2j}$ $(j = m+1, \ldots, n)$; the a_{ij}, b_i, c, f we replace by a'_{ij}, b'_i, c', f', respectively, the primed functions being suitable continuous extensions of the corresponding unprimed ones into D' so that in D one has

$$a'_{ij} = a_{ij} \ (i,j = 1, \ldots, m), \quad b'_i = b_i \ (i = 1, \ldots, n), \quad c' = c, \quad f' = f,$$

while for $j = m+1, \ldots, n$ and x in B

$$b'_j(x,y) = 0 \quad (\text{for } y_i = c'_{1i}, \text{ for } y_i = c'_{2i}; \ i = m+1, \ldots, n);$$

this extension can be carried out so that the quadratic form $\sum a'_{ij} \zeta_i \zeta_j$ is positive definite for (x,y) in D' as well as at P'_1, P'_2 (the „ends" of D') and that the primed functions satisfy in the extended region conditions of the type given in section 1. Since

$$\delta(x,y) = \text{Det.}\,|(a'_{ij}(x,y)| > 0 \quad (\text{at } P'_1, P'_2),$$

dividing the „extended" equation

$$\sum_{i,j} a'_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_1^n b'_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c'u = f'$$

by $|\delta^{1/m}$, we obtain an equation

$$\sum_{i,j} a''_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} + \sum_{1}^{n} b''_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c'' u = f'',$$

with coefficients satisfying (6.5), (6.5 a) in D'.

We apply to (6.4) the transformation, given by the author in (T_2; p. 16), into an integral equation. We obtain

$$u(z,y) = \overset{(m)}{\int_B} K(x,y;z,y)\, u(x,y)\, dx - f^*_m(z,y), \tag{6.6}$$

$$f^*_m(z,y) = \overset{(m)}{\int_B} \varkappa^{-1}(z,y)\, v(x,z;y)\, f_m(x,y)\, dx, \tag{6.6 a}$$

$$K(x,y;z,y) = \varkappa^{-1}(z,y) L'_{m,x}(v(x,z;y)),$$
$$v(x,z;y) = \Gamma^{1-m/2} + \varrho^{4-2m} \Gamma^{-1+m/2} - 2\varrho^{2-m};$$

here $\varrho = \varrho(z)$ (>0) is suitably small, Γ is the function so designated previously (that is, $\Gamma^{1/2}$ is the geodesic distance between x and z, for x near z in B),

$$\varkappa(z,y) = (m-2) \overset{(m-1)}{\int} h^{-m/2}(z,y;\pi)\, d\Omega \tag{6.6 a'}$$

($d\Omega$ = differential element of the surface of the m-hypersphere of radius 1; $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$ is the variable point on the sphere), with

$$h(z,y;\pi) = \sum_{i,j=1}^{m} h_{ij}(z,y)\, \pi_i \pi_j; \quad (h_{ij}) = (a_{ij})^{-1};$$

$v(x,z;y)$ is defined as zero for (x,y) in $D - D^{\varrho}(z)$.

By (6.6 a) and (6.4 a) one has

$$f^*_m(z,y) = f^*(z,y) - \sum_{i>m} v_i(z,y), \tag{6.6 b}$$

where

$$f^*(z,y) = \overset{(m)}{\int_B} \varkappa^{-1}(z,y)\, v(x,z;y)\, f(x,y)\, dx,$$

$$v_i(z,y) = \overset{(m)}{\int_B} \varkappa^{-1}(z,y)\, v(x,z;y)\, b_i(x,y) \frac{\partial u}{\partial y_i}\, dx. \tag{6.6 c}$$

Use will be made of the following notation:

(6.7) $$\int^{(n-m)} = \int_{y_{m+1}=c_{1,m+1}}^{c_{2,m+1}} \dots \int_{y_n=c_{1,n}}^{c_{2,n}},$$

(6.7 a) $$\int^{[i]} = \int^{(n)}$$

with integration with respect to y_i deleted. One has

(6.7 b) $$\int^{(n-m)}\Big[\int_B^{(m)} \dots dx\Big] dy = \int_D^{(n)} \dots dx\,dy.$$

Multiplying (6.6) by $dy_{m+1} \dots dy_n$ and integrating over $c_{1j} \leqslant y_j \leqslant c_{2j}$ $(j = m+1, \dots, n)$, by (6.7 b) we obtain

(6.8) $$\begin{aligned} \int^{(n-m)} u(z,y)\,dy &= \int_D^{(n)} K(x,y;z,y)\,u(x,y)\,dx\,dy - \\ &- \int^{(n-m)} f_m^*(z,y)\,dy \quad \text{(cf. (6.6 b), (6.6 c))}. \end{aligned}$$

Here one has

(6.9) $$\int^{(n-m)} f_m^*(z,y)\,dy = F^*(z) - \sum_{i>m} \tau_i,$$

with

(6.9 a) $$F^*(z) = \int^{(n-m)} f^*(z,y)\,dy, \quad \tau_i = \int^{(n-m)} \nu_i(z,y)\,dy.$$

With the aid of (6.7 a), (6.7 b) and (6.6 c) one obtains

$$\tau_i = \int_D^{(n)} \varkappa^{-1}(z,y)\,v(x,z;y)\,b_i(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y_i}\,dx\,dy = \int^{[i]} \lambda_i \frac{1}{dy_i}\,dx\,dy,$$

where

$$\lambda_i = \int_{y_i=c_{1i}}^{c_{2i}} \varkappa^{-1}(z,y)\,v(x,z;y)\,b_i(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y_i}\,dy_i.$$

Integration by parts yields by (6.5 a)

$$\lambda_i = -\int\limits_{y_i=c_{1i}}^{c_{2i}} u(x,y)\, H_i(x,y;z,y)\, dy_i,$$

where

$$H_i(x,y;z,y) = \frac{\partial}{\partial y_i}\,[\varkappa^{-1}(z,y)\, v(x,z;y)\, b_i(x,y)]. \tag{6.10}$$

The above is under the provision that $u(x,y)$ *be finite for* $y_i = c_{1i}$; *we note that*

$$\varkappa^{-1}(z,y)\, v(x,z;y)\, u(x,y)$$

will then be finite for $y_i = c_{1i}$. For τ_i we thus obtain

$$\tau_i = -\int\limits_D^{(n)} u(x,y)\, H_i(x,y;z,y)\, dx\, dy. \tag{6.10 a}$$

Hence, in view of (6.9),

$$\begin{gathered}\int^{(n-m)} f_m^*(z,y)\, dy = F^*(z) + \int\limits_D^{(n)} u(x,y)\, H(x,y;z,y)\, dx\, dy,\\ H(x,y;z,y) = \sum_{i>m} H_i(x,y;z,y).\end{gathered} \tag{6.11}$$

Thus (6.8) becomes

$$\bar{u}(z) = \int\limits_D^{(n)} u(x,\eta)\, W(x,\eta;z)\, dx\, d\eta - F^*(z), \tag{6.12}$$

where

$$\begin{gathered}W(x,\eta;z) = K(x,\eta;z,\eta) - H(x,\eta;z,\eta)\\ \text{[cf. (6.6 a), (6.11), (6.10)]},\end{gathered} \tag{6.12 a}$$

$$\bar{u}(z) = \int^{(n-m)} u(z,\eta)\, d\eta. \tag{6.12 b}$$

The equation

$$\int^{(n-m)} u(z,\eta)\, d\eta = \sigma(z), \tag{6.13}$$

where $\sigma(z)$ is a known function, may be inverted as follows. A particular solution is

$$u_0(z,y) = \alpha'\sigma(z) \quad \left[\alpha'\int^{(n-m)} d\eta = 1\right]. \tag{6.14}$$

If $u(z,y)$ is any other solution one has

$$\int^{(n-m)} (u(z,y) - u_0(z,y))\, dy = 0.$$

Accordingly *the general solution of* (6.13) *is of the form*

$$u(z,y) = \alpha'\sigma(z) + u^0(z,y), \tag{6.15}$$

where $u^0(z,y)$ is an arbitrary solution of the equation

$$\int^{(n-m)} u^0(z,y)\, dy = 0. \tag{6.15 a}$$

In view of the above, from (6.12), (6.12 b) one infers

$$u(z,y) = \alpha' \int_D^{(n)} u(x,\eta)\, W(x,\eta;z) d\,x\, d\eta - \alpha' F^*(z) + u^0(z,y),$$

where $u^0(z,y)$ is some solution of (6.15 a). *We thus obtain for u an integral equation, in appearance at least of the second kind,*

$$u(z,y) = \int_D^{(n)} u(x,\eta)\, T(x,\eta;z,y)\, dx\, d\eta + F(z,y), \tag{6.16}$$

with

$$T(x,\eta;z,y) = \alpha' W(x,\eta;z), \tag{6.16 a}$$

$$F(z,y) = -\alpha' F^*(z) + u^0(z,y). \tag{6.16 b}$$

Though T is independent of y, we write $T(x,\eta;z,y)$ for symetry of notation.

We now consider the converse problem. *Assuming that u is a solution of the integral equation* (6.16), *such that $u, L(u), L'(u)$ are continuous in $D + P_1 + P_2$, in what sense will u satisfy the differential equation $L(u) = f$?*

We think of u as substituted in (6.16). On taking note of (6.16 a), (6.16 b), (6.14), multiplying by dy and integrating

we obtain

$$\overset{(n-m)}{\int} u(z,y)\,dy = \overset{(n)}{\int_D} u(x,\eta)\,W(x,\eta;z)\,dx\,d\eta - F^*(z) + \overset{(n-m)}{\int} u^0(z,y)\,dy.$$

The last term here is zero by (6.15 a). We thus obtained (6.12)—(6.12 b); this may be expressed as

$$\overset{(n-m)}{\int} u(z,y)\,dy = \overset{(n)}{\int_D} u(x,\eta)\,K(x,\eta;z,\eta)\,dx\,d\eta -$$
$$-\Big[\overset{(n)}{\int_D} u(x,\eta)\,H(x,\eta;z,\eta)\,dx\,d\eta + F^*(z)\Big].$$

Accordingly *u will satisfy* (6.8), *provided*

$$\overset{(n)}{\int_D} u(x,\eta)\,H(x,\eta;z,\eta)\,dx\,d\eta + F^*(z) = \overset{(n-m)}{\int} f_m^*(z,\eta)\,d\eta;$$

by (6.9) for this purpose it is sufficient to secure

$$\overset{(n)}{\int_D} u(x,\eta)\,H_i(x,\eta;z,\eta)\,dx\,d\eta = -\tau_i \quad (i>m),$$

with H_i from (6.10) and τ_i defined by (6.9 a), (6.6 c). *Hence* (6.8) *will hold if it is shown that the expression*

$$A = \overset{(n)}{\int_D} u(x,\eta)\left\{\frac{\partial}{\partial\eta_i}[\varkappa^{-1}(z,\eta)\,v(x,z;\eta)\,b_i(x,\eta)]\right\}dx\,d\eta$$

equals

$$B = -\overset{(n-m)}{\int}\left\{\overset{(m)}{\int}\varkappa^{-1}(z,\eta)\,v(x,z;\eta)\,b_i(x,\eta)\,\frac{\partial u}{\partial\eta_i}\,dx\right\}d\eta =$$
$$= -\overset{(n)}{\int_D}\frac{\partial u}{\partial\eta_i}[\varkappa^{-1}(z,\eta)\,v(x,z;\eta)\,b_i(x,\eta)]\,dx\,d\eta.$$

Now one has

$$A = \overset{[i]}{\int}\Big[\int_{\eta_i=c_{1i}}^{c_{2i}} u(x,\eta)\left\{\frac{\partial}{\partial\eta_i}[\varkappa^{-1}(z,\eta)\,v(x,z;\eta)\,b_i(x,\eta)]\right\}d\eta_i\Big]\frac{dx\,d\eta}{d\eta_i}$$

(cf. (6.7 a)). Integrating with respect to η_i by parts, we obtain

$$A = \int^{[i]} \left\{ u(x,\eta)\,[\varkappa^{-1}(z,\eta)\,v(x,z;\eta)\,b_i(x,\eta)] \right\}_{\eta_i=c_{1i}}^{c_{2i}} \frac{dx\,d\eta}{d\eta_i} -$$

$$- \int^{[i]} \left\{ \int_{\eta_i=c_{1i}}^{c_{2i}} [\varkappa^{-1}(z,\eta)\,v(x,z;\eta)\,b_i(x,\eta)]\,\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\,d\eta_i \right\} \frac{dx\,d\eta}{d\eta_i}.$$

Here $i > m$; thus by (6.5 a) $A = B$. Whence u *satisfies* (6.8).

Now, previously we obtained (6.8) from (6.6), multiplying (6.6) by $d\eta$ and integrating with respect to $\eta_{m+1}, \dots, \eta_n$. Thus proceeding in reverse, we can assert that u satisfies

$$(6.17) \quad u(z,\eta) = \int_B^{(m)} K(x,\eta;z,\eta)\,u(x,\eta)\,dx - f_m^*(z,\eta) - u^*(z,\eta),$$

where $u^*(z,\eta)$ is some function (continuous in $D + P_1 + P_2$) such that

$$(6.17\text{ a}) \qquad \int^{(n-m)} u^*(z,\eta)\,d\eta = 0.$$

Let $f'_m(x,\eta)$ be any function (of the same type as $f(x,\eta)$), satisfying

$$(6.18) \qquad u^*(z,\eta) = \int_B^{(m)} \varkappa^{-1}(z,\eta)\,v(x,z;\eta)\,f'_m(x,\eta)\,dx\,;$$

as a consequence of the relation satisfied by u^* one has

$$(6.18\text{ a}) \qquad \int_D^{(n)} \varkappa^{-1}(z,\eta)\,v(x,z;\eta)\,f'_m(x,\eta)\,dx\,d\eta = 0.$$

By (6.6 a) one may then express (6.17) in the form

$$(6.19) \qquad u(z,\eta) = \int_B^{(m)} K(x,\eta;z,\eta)\,u(x,\eta)\,dx - F_m^*(z,\eta),$$

$$F_m^*(z,\eta) = \int_B^{(m)} \varkappa^{-1}(z,\eta)\,v(x,z;\eta)\,[f_m(x,\eta) + f'_m(x,\eta)]\,dx.$$

We adapt the notation in (T_2; section 3) to the present case. We retrace the proof, given in (T_2), that a regular solution

of $L_m(u) = f_m$ satisfies an integral equation, with the following modification: the assumption that u satisfies $L_m(u) = f_m$ is dropped; it is merely assumed that u, $L(u)$, $L'(u)$ are continuous in $D + P_1 + P_2$. Most of the developments in (T_2; section 3) will continue to hold, in particular — the crucial relation (T_2; (3.33)). Accordingly we can assert that

$$(6.20)\qquad \overset{(m)}{\int} [v(x,z;\eta) L_m(u(x,\eta)) - u(x,\eta) L'_{m,x}(v(x,z;\eta))]dx = \\ = -\varkappa(z,\eta)\, u(z,\eta)$$

for the particular function v, introduced in (6.6 a), *and for all u of stated type.*

We continue now with a particular function u, as specified in the italics subsequent (6.16 b). This function satisfies (6.19); by (6.6 a) one may put (6.19) in the form

$$(6.21)\qquad \overset{(m)}{\int_B} [v(x,z;\eta)(f_m(x,\eta) + f'_m(x,\eta)) - u(x,\eta) L'_{m,x}(v(x,z;\eta))]dx = \\ = -\varkappa(z,\eta)\, u(z,\eta);$$

u also satisfies (6.20). On taking the difference of (6.20), (6.21) we obtain

$$\overset{(m)}{\int_B} v(x,z;\eta)[L_m(u(x,\eta)) - f_m(x,\eta) - f'_m(x,\eta)]dx = 0\,.$$

Hence this function u satisfies the partial differential equation

$$L_m(u(x,\eta)) - f_m(x,\eta) - f'_m(x,\eta) = p(x,\eta),$$

where $p(x,\eta)$ is some (regular) solution of the equation

$$(6.22)\qquad \overset{(m)}{\int} v(x,z;\eta)\, p(x,\eta)\, dx = 0\,.$$

As a consequence of (6.4 a) and (6.2) the following is concluded.

Theorem 6.23. *Assume that for the coefficients of the parabolic partial differential equation $L(u) = f$ we have arranged* (6.5), (6.5 a). *If u is a (regular) solution of $L(u) = f$, then u satisfies*

the integral equation (6.16)—(6.16 b) *(in appearance of the second kind), where* $u^0(z,y)$ *is some function such that*

$$\int^{(n-m)} u^0(z,y)\,dy = 0. \tag{6.23 a}$$

Conversely, suppose u *is a solution of the integral equation* (6.16) *(with some* u^0 *subject to* (6.23 a)*), for which* $u, L(u), L'(u)$ *are continuous in* $D+P_1+P_2$. *Then* u *will satisfy the differential equation*

$$L(u(x,y)) = f(x,y) + f'_m(x,y) + p(x,y), \tag{6.23 b}$$

where $p(x,y)$ *is a solution of* (6.22) *and* f'_m *is a solution of*

$$\int^{(n)} \varkappa^{-1}(z,y)\,v(x,z;y)\,f'_m(x,y)\,dx\,dy = 0. \tag{6.23 c}$$

Note. The equation (6.23 b) becomes $L(u)=f$, whenever the kernels

$$v(x,z;y), \quad \varkappa^{-1}(z,y)\,v(x,z;y)$$

have suitable properties of closure, suggested by the equations (6.22), (6.23 c).

7. Study of the integral equation of section 6. The purpose of this section is to find conditions on the coefficients in the differential equation $L(u)=f$ under which the corresponding integral equation (6.16) is of regular Fredholm type — at least after a finite number of iterations. These conditions will be essentially in the nature of requirements regarding the possible orders of infinitude near the „cylindrical" part C of the boundary of D of the coefficients and of certain ones of their derivatives.

Further on in this section it will be proved that

$$T(x,\eta;z,y) = t(x,\eta;z,y)\,r^{-\alpha}(x,z), \tag{7.1}$$

where $r(x,z)$ is the Euclidean distance between

$$x=(x_1,\ldots,x_m) \quad z=(z_1,\ldots,z_m),$$

$0<\alpha<m$ and

$$|t(x,\eta;z,y)|<\tau(x;z), \tag{7.1 a}$$

where $\tau(x,z)$ is independent of η, y.

Let $\circ$ be the symbol of „composition" in the sense

$$A(x,\eta;z,y)\circ B(x,\eta;z,y)=\int\limits_D^{(n)} A(x,\eta;z_{(1)},y_{(1)})\,B(z_{(1)},y_{(1)};z,y)\,dz_{(1)}\,dy_{(1)};$$

we shall make the convention that $A\circ 1=A$. Use will also be made of the following designation for „composition powers":

$$T^{[0]}=1,\quad T^{[1]}=T,\quad T^{[2]}=T\circ T,\quad \text{etc.}$$

Symbolically (6.16) may be written in the form

$$u=u\circ T+F. \tag{7.2}$$

The result of ν-fold iteration will be

$$u(z,y)=\int\limits_D^{(n)} u(x,\eta)\,T^{[\nu+1]}(x,\eta;z,y)\,dx\,d\eta+F_\nu, \tag{7.2 a}$$

where

$$F_\nu=F\circ[1+T^{[1]}+\ldots+T^{[\nu]}]. \tag{7.2 b}$$

We proceed under (7.1), (7.1 a). On recalling that

$$\int\limits_D^{(n)}\ldots dz_{(1)}\,dy_{(1)}=\int^{(n-m)} dy_{(1)}\int\limits_B^{(m)}\ldots dz_{(1)},$$

we obtain

$$T^{[2]}(x,\eta;z,y)=\int^{(n-m)} dy_{(1)}\int\limits_B^{(m)} T(x,\eta;z_{(1)},y_{(1)})\,T(z_{(1)},y_{(1)};z,y)\,dz_{(1)}.$$

Accordingly, by (7.1), (7.1 a), (6.14)

$$|T^{[2]}(x,\eta;z,y)|\leqslant\frac{1}{\alpha'}\int\limits_B^{(m)}\frac{\tau(x;z_{(1)})\,\tau(z_{(1)};z)}{r^{\alpha}(x,z_{(1)})\,r^{\alpha}(z_{(1)},z)}\,dz_{(1)}.$$

Further,

$$|T^{[3]}(x,\eta;z,y)|=|T^{[2]}\circ T|\leqslant|T^{[2]}|\circ|T|;$$

thus by the preceding formula

$$|T^{[3]}(x,\eta;z,y)| \leqslant \frac{1}{\alpha'} \int\limits^{(n-m)} dy_{(2)} \int\limits_B^{(m)} \left[\int\limits_B^{(m)} \frac{\tau(x;z_{(1)})\,\tau(z_{(1)};z_{(2)})}{r^{\alpha}(x,z_{(1)})\,r^{\alpha}(z_{(1)},z_{(2)})}\, dz_{(1)} \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{\tau(z_{(2)};z)}{r^{\alpha}(z_{(2)},z)}\, dz_{(2)} = \frac{1}{(\alpha')^2} \int\limits_B^{(m)} \int\limits_B^{(m)} \frac{\tau(x;z_{(1)})\,\tau(z_{(1)};z_{(2)})\,\tau(z_{(2)};z)}{r^{\alpha}(x,z_{(1)})\,r^{\alpha}(z_{(1)},z_{(2)})\,r^{\alpha}(z_{(2)},z)}\, dz_{(1)}\, dz_{(2)}\,.$$

In general

$$(7.3) \qquad |T^{[\nu+1]}(x,\eta;z,y)| \leqslant (\alpha')^{-\nu} \left[\frac{\tau(x;z)}{r^{\alpha}(x,z)} \right]^{<\nu+1>}.$$

The superscript last displayed is one for „composition powers" when „composition" of say $A(x;z)$, $B(x;z)$ is in the sense of forming

$$A \,..\, B = \int\limits_B^{(m)} A(x;z_{(1)}) B(z_{(1)};z)\, dz_{(1)}\,;$$

thus

$$A^{<0>} = 1, \quad A^{<1>} = A, \quad A^{<2>} = A \,..\, A, \quad \text{etc.}$$

As a consequence of section 2 in the author's work (T_1) and of (7.3) we find that *the integral*

$$(7.4) \qquad \int\limits_D^{(n)} \int\limits_D^{(n)} T^{[\nu+1]\,2}(x,\eta;z,y)\,(dx\, d\eta)\,(dz\, dy)$$

exists for ν equal the least integer exceeding $(m/p-\alpha)^{-1}\alpha$, where $1/p = 1 - 1/q$, provided the integral

$$(7.5) \qquad \int\limits_B^{(m)} \int\limits_B^{(m)} \tau^{2q}(x;z)\, dx\, dz \quad (\mathit{some}\ q > m(m-\alpha^{-1}))$$

exists. Accordingly *the integral equation* (6.16) *is a regular one if* (7.5) *is secured.* Also by section 2 of (T_1) and (7.3), *the integral* (7.4) *exists when* $\tau(x,z) < \tau(z)$, *where*

$$(7.5\,\mathrm{a}) \qquad \int\limits_B^{(m)} \tau^{q}(z)\, dz < \infty\,.$$

As in section 4, let c^* be a generic designation for a positive constant (independent of the „parameters" y_j, η_j $(j>m)$).

By (6.3) and the definition of E' in (2.3) one has

$$L'_m(v) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b'_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + c'v,$$

(7.6)

$$b'_i = 2\sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i, \quad c' = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial b_i} + c.$$

The function $K(x,\eta;z,y)$ of (6.6 a) is the function (T_1; (4.3 a)), where $G(v)$ corresponds to (7.6); also, $\varkappa(z)$ cf. (T_1; (4.3 e)) is identical with $\varkappa(z,y)$, $y=(y_{m+1},\dots,y_n)$ being in the nature of a parameter. As before, we let $d(z)$ be the distance from (z,y) to the „cylindrical" part C of the boundary of D. In agreement with the definition of $a_s(z)$ in (T_1; section 3), of $b_0(z)$ in the text subsequent (T_1; (4.21 b)) and of $c_0(z)$ in (T_1; Theorem 5.8) *we let a_0, a_1, a_2, b_0, c_0 denote functions of z such that*

(7.7) $$|\textit{partial derivatives of order } s \textit{ of } a_{ij}(x,y)| \leqslant a_s(z) \quad (s=0,1,2),$$
$$a_0(z) \geqslant 1, \quad |b'_i(x,y)| \leqslant b_0(z) \quad (i=1,\dots,m), \quad |c'(x,y)| \leqslant c_0(z)$$

for all x in the m-sphere $r(x,z) \leqslant d(z)/2$; we choose $\bar{s}=\bar{s}(z)$ so that, for c^* suitably small,

(7.8) $$0<\bar{s} \leqslant c^* a_0^{-1}, \; c^* d a_0^{-1}, \; c^* a_1^{-1}, \; c^* a_2^{-1}, \; c^* s_1, \; c^* s_2,$$

where

$$s_1 = \frac{a_0^{1-2m}}{a_0 a_1 + (a_1^2 + a_0 a_2)d}, \quad s_2 = \frac{a_0^{1-m}}{a_0 a_2 + a_1^2 + a_1 a_0}.$$

With (7.6)—(7.8) in view, as a consequence of (T_1; Theorems 4.23, 5.8) *the following is inferred:*

(7.9) $$K(x,y;z,y) = \frac{w(x,z;y)}{r^{\alpha}(x,z)} \quad (\alpha = m-1+\epsilon; \; 0 \leqslant \epsilon < 1),$$

where

$$|w(x,z;y)| \leqslant c^* w^*(z);$$

(7.9 a) $$w^*(z) = a_0^{m^2}[(1+b_0 a_0^{3/2\,m-1} d + a_0^{9/2\,m-2} q d)(a_0 \bar{s})^{\epsilon-1} + $$
$$+ b_0 a^{3/2\,m-1} d^{\epsilon} + a_0^{9/2\,m-2} q d^{\epsilon}] + c_0 a_0^{m^2-m-1} d^{1+\epsilon}(z),$$

with $q = a_0 a_2 + a_1^2 + a_0 a_1$.

The study of H (cf. 6.11), (6.10)) presents new difficulties, especially in view of the necessity of estimating a bound for $|\partial\Gamma/\partial y_i|$. We introduce

Notation 7.10. *$b_0^0(z)$, $b_1^0(z)$, $a_1^0(z)$ are to be functions of z, alone, so that*

$$|b_i(x,y)| \leqslant b_0^0(z), \quad \left|\frac{\partial b_i(x,y)}{\partial y_i}\right| \leqslant b_1^0(z), \quad \left|\frac{\partial}{\partial y_i} a_{\alpha\beta}(x,y)\right| \leqslant a_1^0(z)$$

for $r(x,z) \leqslant d(z)/2$ (z in B; $c_{1j} \leqslant y_j \leqslant c_{2j}$).

The following result will be proved.

Lemma 7.11. *For x,y in $D^\varrho(z)$ and z in B one has*

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i}\Gamma(x,z;y)\right| < c^* a_1^0(z)\, a_0^{4m-2}(z) r^2(x,z). \tag{7.11 a}$$

We utilize the fact that $\Gamma^{1/2}$ is representable in the form (2.5⁰). Now x,z are points in B, with $r(x,z)$ suitably small; thus $\Gamma^{1/2}(x,z;y)$ is the relative minimum for integrals of the form

$$\int \sqrt{H(\zeta,y;d\zeta)} \quad (\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_m) \text{ variable point of integration}),$$

extended along (suitably regular) curves joining the points z,x: we now think of z,x as fixed. The geodesic $C(y) = C(x,z;y)$ is the minimizing curve, joining z and x and yielding the value $\Gamma^{1/2}$. Let

$$\Delta y = (\Delta y_{m+1} = 0,\dots,\Delta y_{j-1} = 0,\ \Delta y_j,\ \Delta y_{j+1} = 0,\dots,\Delta y_n = 0),$$

with Δy_j small. We have

$$\sqrt{\Gamma(x,z;y)} = \int_{C(y)} \sqrt{H(\zeta,y;d\zeta)} \leqslant \int_{C(y+\Delta y)} \sqrt{H(\zeta,y;d\zeta)} \tag{1⁰}$$

and

$$\sqrt{\Gamma(x,z;y+\Delta y)} = \int_{C(y+\Delta y)} \sqrt{H(\zeta,y+\Delta y;d\zeta)} \leqslant \int_{C(y)} \sqrt{H(\zeta,y+\Delta y;d\zeta)}. \tag{2⁰}$$

Suppose

$$\sqrt{\Gamma(x,z;y+\Delta y)} \geqslant \sqrt{\Gamma(x,z;y)}; \tag{3⁰}$$

then, by (2^0),

$$(4^0)\quad \begin{aligned} 0 &\leqslant \sqrt{\Gamma(x,z;y+\Delta y)} - \sqrt{\Gamma(x,z;y)} \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{C(y)} [\sqrt{H(\zeta, y+\Delta y; d\zeta)} - \sqrt{H(\zeta,y;d\zeta)}]. \end{aligned}$$

In the case alternate to (3^0), by (1^0) we obtain

$$(5^0)\quad \begin{aligned} 0 &\leqslant \sqrt{\Gamma(x,z;y)} - \sqrt{\Gamma(x,z;y+\Delta y)} \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{C(y+\Delta y)} [\sqrt{H(\zeta,y;d\zeta)} - \sqrt{H(\zeta,y+\Delta y;d\zeta)}]. \end{aligned}$$

For x, z fixed, $C(y)$ varies continuously with y. Thus, dividing (4^0), (5^0) (whichever holds) by Δy_j and letting Δy_i tend to zero, we obtain

$$\frac{1}{2}\Gamma^{-1/2}(x,z;y)\left|\frac{\partial}{\partial y_j}\Gamma(x,z;y)\right| \leqslant \int\limits_{C(y)} \left|\frac{\partial}{\partial y_j}\sqrt{H(\zeta,y;d\zeta)}\right|.$$

Here

$$H(\zeta,y;d\zeta) = \sum_{\varkappa,\nu} h_{\varkappa\nu}(\zeta,y)\,d\zeta_\varkappa d\zeta_\nu;$$

hence, with s denoting the variable involved in the parametric representation of $C(y)$ in (2.5), (2.5 a), it is inferred that

$$(7.12)\quad \Gamma^{-1/2}\left|\frac{\partial}{\partial y_j}\Gamma\right| \leqslant \int\limits_{s=0}^{s} \left|H^{-1/2}\left(x,y;\frac{dx}{ds}\right)\frac{\partial}{\partial y_j}H\left(x,y;\frac{dx}{ds}\right)\right| ds$$

($x_i(s) = x_i$; $x_i(0) = z_i$; $p_i(0) = p_{0i}$). As noted in (2.6),

$$H\left(x,y;\frac{dx}{ds}\right) = A(z,y;p_0)\left[=\sum_{\varkappa,\nu} a_{\varkappa\nu}(z,y)\,p_{0\varkappa}p_{0\nu}\right]$$

along the geodesic $C(y)$. Accordingly by (7.12) and (2.6)

$$(7.12\text{ a})\quad \begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial y_j}\Gamma(x,z;y)\right| &\leqslant \left[\frac{\Gamma(x,z;y)}{A(z,y;p_0)}\right]^{1/2} \int\limits_{s=0}^{s}\left|\frac{\partial}{\partial y_j}H\left(x,y;\frac{dx}{ds}\right)\right| ds = \\ &= s\int\limits_{s=0}^{s}\left|\frac{\partial}{\partial y_i}H\left(x,y;\frac{dx}{ds}\right)\right| ds. \end{aligned}$$

In view of (6.5) and the relation $(h_{ij})=(a_{ij})^{-1}$, h_{ij} is a sum of terms $\pm\Delta$, where the Δ are determinants of $(m-1)^2$ elements each from amongst the $a_{\varkappa\nu}(x,y)$; $\partial\Delta/\partial y_j$ is a sum of terms, which apart from the sign, are of the form

$$a_{i_1 j_1}\, a_{i_2 j_2} \dots a_{i_{m-2}, j_{m-2}} \frac{\partial}{\partial y_j} a_{i_{m-1}, j_{m-1}};$$

thus in view of the notation (7.10)

$$(1_0) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial y_j} h_{\nu\varkappa}(x,y)\right| < c^* a_0^{m-2}(z)\, a_1^0(z)$$

(compare with (T_1; (4.18)). By a formula preceding (T_1; (4.22 b))

$$(2_0) \qquad s < c^* \mu^{-1/2}(z)\, \delta_0^{-1}(z)\, r(x,z);$$

now in view of (T_1; (5_0) of section 5)

$$\delta_0(z) = c^* a_0^{1/2-m}(z) \quad (c^* \text{ small})$$

and as a consequence of (T_1; (4.19 a))

$$\mu(z) = c^* a_0^{-m+1}(z);$$

thus (2_0) yields

$$(3_0) \qquad s < c^* a_0^{3/2 m-1}(z)\, r(x,z);$$

furthermore, by virtue of (T_1; (3.1 c), (3.4 d'))

$$(4_0) \qquad |p_\varkappa(s)| < c^*.$$

In view of (2.5) and (4_0)

$$\left|\frac{dx_\nu}{ds}\right| < c^* a_0(z) \quad \text{(along the geodesic } C(y) = C(x,z;y)).$$

Whence, by (1_0),

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_j} H\left(x,y;\frac{dx}{ds}\right)\right| = \left|\sum_{\varkappa,\nu} \frac{\partial}{\partial y_j} h_{\varkappa\nu}(x,y) \frac{dx_\varkappa}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right| < c a^*{}_0^m(z)\, a_1^0(z).$$

Thus (7.12 a) will yield

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_j}\Gamma(x,z;y)\right| < c^* s^2 a_0^m(z)\, a_1^0(z).$$

The truth of the Lemma will follow as a consequence of (3_0).

We shall now prove the

Lemma 7.13. *For (x,y) in $D^{\varrho}(z)$ and z in B one has*

(7.13 a) $$0 < \varkappa^{-1}(z,y) < c^* a^{1/2 m^2 - 1/2 m}(z),$$

(7.13 b) $$\left|\frac{\partial \varkappa(z,y)}{\partial y_i}\right| < c^* a_1^0(z)\, a_0^{1/2 m^3 - 1/2 m - 1}(z),$$

(7.13 c) $$0 \leqslant v(x,z;y) < c^* r^{2-m}(x,z)\, a_0^{1/2 m^2 - 1/2 m - 1}(z),$$

(7.13 d) $$\left|\frac{\partial}{\partial y_i} v(x,z;y)\right| < c^* r^{2-m}(x,z)\, a_0^{1/2 m^2 + 9/2 m - 2}(z) a_1^0(z).$$

As a consequence of (T_1; (4.18))

$$|h_{ij}(z,y)| < c^* a_0^{m-1}(z) = h_0(z);$$

thus $h(z,y;\pi)$, where $\pi_1^2 + \dots + \pi_m^2 = 1$, has an upper bound of form $c^* a_1^{m-1}(z)$; (7.13 a) will follow by (6.6 a').

To establish (7.13 b) we shall need a lower bound $\bar{\lambda}$ for the minimum λ_1 (a function of z,y) of the definite quadratic form

$$h(z,y;\pi) = \sum_{\varkappa,\nu} h_{\varkappa,\nu}(z,y)\, \pi_\varkappa \pi_\nu,$$

under the condition $\pi_1^2 + \dots + \pi_m^2 = 1$; $\bar{\lambda}$ is to be a positive function of z alone. We follow the method used for a similar purpose in the text subsequent (T_1; Lemma 4.19). Since $h_{ij} = h_{ji}$, the equation

$$\sigma(\lambda) = \text{Det.}\,|(h_{ij}(z,y) - \delta_{ij}\lambda)| = 0$$

($\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ij} = 0$ for $i \neq j$) has positive roots and λ_1 is the least root of the equation. By (6.5) $\sigma(0) = 1$; thus

(1^0) $$\sigma(\lambda) = 1 + \lambda \sigma^{(1)}(\theta\lambda) \quad (0 < \theta < 1);$$

$\sigma^{(1)}(\lambda)$ is the sum of m determinants Δ, each of $(m-1)^2$ elements, of the form

$$\text{Det.}\,|(q_{ij})| \quad (i,j = 1, \dots, m-1),$$

where the q_{ij} are certain ones of the $h_{\varkappa\nu}(z,y) - \delta_{\varkappa\nu}\lambda$; hence

$$|\sigma^{(1)}(\lambda)| \leqslant m!\,(h_0(z) + 1)^{m-1} \quad (\text{for } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

where $h_0(z)$ is from preceding inequalities for the $h_{ij}(z,y)$; since $a_0(z) \geqslant 1$, we obtain

(2⁰) $\quad |\sigma^{(1)}(\theta\lambda)| < c' a_0^{m^2-2m+1}(z) \quad$ (for $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; $c' = c^*$).

For $\bar{\lambda}$ one may take any number such that

$$\sigma(\lambda) \neq 0 \quad (\text{for } 0 \leqslant \lambda < \bar{\lambda}).$$

In view of (1⁰), (2⁰) it would suffice to take

$$0 < \bar{\lambda} \leqslant 1, \quad \bar{\lambda}\, c' a_0^{m^2-2m+1}(z) \leqslant 1;$$

thus, for $\pi_1^2 + \ldots + \pi_m^2 = 1$,

(7.14) $\quad h(z,y;\pi) > c^* a_0^{-m^2+2m-1}(z) = c^* \eta(z) \quad$ (c^* suitably small).

To prove (7.13 b) we shall also need an upper bound for $|\partial h(z,y;\pi)/\partial y_i|$, when $\pi_1^2 + \ldots + \pi_m^2 = 1$. With the aid of the formula (1_0), subsequent (7.12 a), stated for $x = z$, we obtain

(7.15) $$\left| \frac{\partial}{\partial y_i} h(z,y;\pi) \right| = \left| \sum_{\varkappa,\nu} \frac{\partial}{\partial y_i} h_{\varkappa\nu}(z,y)\, \pi_\varkappa \pi_\nu \right| < c^* a_0^{m-2}(z)\, a_1^0(z).$$

In view of (6.6 a′)

$$\frac{\partial \varkappa(z,y)}{\partial y_i} = -\frac{m}{2}(m-2) \int^{(m-1)} h^{-1-\frac{1}{2}m}(z,y;\pi) \frac{\partial}{\partial y_i} h(z,y;\pi)\, d\Omega;$$

thus by (7.14), (7.15)

$$\left| \frac{\partial \varkappa(z,y)}{\partial y_i} \right| < c^* \left(\frac{1}{\eta(z)} \right)^{\frac{1}{2}m+1} a_0^{m-2}(z)\, a_1^0(z);$$

from this (7.13 b) ensues.

As a consequence of (6.6 a) and since $v(x,z;y) \geqslant 0$, one obtains

$$v(x,z;y) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \right)^{m-2} + \frac{\sqrt{\Gamma}^{\,m-2}}{\varrho^{2m-4}} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}^{\,m-2}} \left[1 + (\varrho^{-1}\sqrt{\Gamma})^{2m-4} \right].$$

Now for (x,y) in $D^{\varrho}(z)$

$$0 \leqslant \Gamma(x,z;y) \leqslant \varrho^2;$$

hence, by (4.9 a),

$$v(x,z;y) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\Gamma}^{m-2}} = \frac{2}{r^{m-2}(x,z)}\left(\frac{r(x,z)}{\sqrt{\Gamma}}\right)^{m-2} \leqslant \frac{2\,\delta^{m-2}(z)}{r^{m-2}(x,z)};$$

as stated preceding (4.20),

$$\delta(z) = c^* a_0^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}}(z); \tag{7.16}$$

this leads to (7.13 c). By (6.6 a)

$$\frac{\partial v}{\partial y_i} = \left(\frac{m}{2} - 1\right)\Gamma^{-m/2}\left[\left(\frac{\sqrt{\Gamma}}{\varrho}\right)^{2m-4} - 1\right]\frac{\partial \Gamma}{\partial y_i};$$

accordingly

$$\left|\frac{\partial v}{\partial y_i}\right| \leqslant \left(\frac{m}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\right)^m \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial y_i}\right| < c^* r^{-m}(x,z)\,\delta^m(z)\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial y_i}\right|;$$

whence with the aid of (7.16) and (7.11 a) we infer (7.13 d). The proof of Lemma 7.13 has been completed.

As a consequence of (6.10) one has

$$H_i = \alpha + \beta + \gamma, \quad \alpha = -\varkappa^{-2}(z,y)\,v(x,z;y)\,b_i(x,y)\,\frac{\partial \varkappa(z,y)}{\partial y_i},$$

$$\beta = \varkappa^{-1}(z,y)\,b_i(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y_i}\,v(x,z;y), \quad \gamma = \varkappa^{-1}(z,y)\,v(x,z;y)\,\frac{\partial b_i(x,y)}{\partial y_i}.$$

By virtue of the Notation (7.10) and (7.13 a)—(7.13 d) it is deduced that

$$|\alpha| < c^* r^{2-m}(x,z)\,b_0^0\,a_1^0\,a_0^{m'}, \quad |\beta| < c^* r^{2-m}(x,z)\,b_0^0\,a_1^0\,a_0^{m^2+4m-2},$$
$$|\gamma| < c^* r^{2-m}(x,z)\,b_1^0\,a_0^{m^2-m-1},$$

where

$$m' = \frac{1}{2}m^3 + \frac{3}{2}m^2 - 2m - 2. \tag{7.17}$$

Inasmuch as $m \geqslant 3$, one has $m' \geqslant m^2 + 4m - 2$; since $a_0(z) \geqslant 1$ it is inferred that H of (6.11) (as well as H_i) satisfies the inequality

$$|H| < c^* r^{2-m}(x,z)\,\sigma^*(z),$$

where

$$\sigma^*(z) = b_0^0\,a_1^0\,a_1^{m'} + b_1^0\,a_0^{m^2-m-1}. \tag{7.18}$$

With (7.9) in view we write

$$H = \frac{\sigma(x,z;y)}{r^{\alpha}(x,z)};\tag{7.19}$$

as a consequence of the preceding inequality one has

(7.19 a) $\quad |\sigma(x,z;y)| < c^*\sigma^*(z)\, r^{1+\epsilon}(x,z) < c^*\sigma^*(z)\, d^{1+\epsilon}(z),$

inasmuch as $r(x,z) \leqslant d(z)/2$ for (x,y) in $D^{\varrho}(z)$ and z in B.

By virtue of (6.16 a), (6.12 a) and (7.9), (7.9 a) and of the above, for the function $\tau(x,z)$ in (7.1 a) one may take

$$\tau(x,z) = c^*(w^*(z) + \sigma^*(z)\, d^{1+\epsilon}(z)) \quad \text{(cf. (7.9 a))},$$

which is a function independent of x. The statement (7.4), (7.5 a) thus leads to

Theorem 7.20. *The integral equation of section* 6, *corresponding to the differential equation* $L(u)=f$, *is regular one of Fredholm type, if the integrals*

(7.20 a) $\quad \overset{(m)}{\int_B} w^{*q}(z)\, dz, \quad \overset{(m)}{\int_B} \sigma^{*q}(z)\, d^{(1+\epsilon)q}(z)\, dz \qquad \left(\textit{some } q > \dfrac{m}{m-\alpha}\right)$

exist (cf. (7.9 a), (7.18), (7.17), *Notations* (7.7), (7.10), *hypotheses* (6.5), (6.5 a)). *It is understood that* f *is to be subject to conditions under which* $F_\nu(z,y)$ $\left(\text{cf. (7.2 b); } \textit{least integer } \nu > \left(\dfrac{m}{p} - \alpha\right)^{-1} \alpha\right)$ *is of integrable square over* D.

We proceed now to obtain explicitly the conditions referred to in the concluding statement above, proving

Theorem 7.21. *In accordance with Theorem* 7.20 *we assume that the integrals* (7.20 a) *exist. Designate by* $f^0(z)$ *a function so that*

(7.21 a) $$|f(x,y)| \leqslant f^0(z)$$

for (x,y) *in the „cylinder"* C_z:

(7.21 b) $\quad r(x,z) \leqslant \dfrac{d(z)}{2}, \quad c_{1j} \leqslant y_j \leqslant c_{2j} \quad (j = m+1, \dots, n).$

$F_\nu(z,y)$ *from the iterated integral equation* (7.2 a) *will be of integrable square for* (z,y) *in* D *and, in fact,* $|F_\nu(z,y)|$ *will be* L_q, *if the integral*

(7.21 c) $\quad \overset{(m)}{\int_B} f_0^q(z)\, dz \quad [f_0(z) = a_0^{m^2-m-1}(z)\, d^2(z)\, f^0(z)]$

exists, while the function $u^0(z,y)$ *involved in* (6.16b), (6.15a), *satisfies*

$$(7.21\text{d}) \qquad |u^0(z,y)| < c^* f_0(z) \quad [z,y) \text{ in } D].$$

We write

$$(7.22) \qquad \tau(z) = w^*(z) + \sigma^*(z)\, d^{1+\epsilon}(z);$$

by hypothesis $\tau(z)$ is L_q over B. *It is observed that*

$$(7.23) \qquad \int\limits_B^{(m)} \frac{\lambda(z)}{r^\alpha(x,z)}\, dz < c^*$$

if $\lambda(z)$ (>0) *is* L_q *over* B. In fact, using the inequality

$$\left|\int a(z)\, b(z)\, dz\right| \leqslant \left[\int |a|^p dz\right]^{1/p} \left[\int |b|^q dz\right]^{1/q} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

valid whenever the integrals in the second member exist, we obtain

$$\int\limits_B^{(m)} \frac{\lambda(z)}{r^\alpha(x,z)}\, dz \leqslant \left[\int\limits_B^{(m)} \frac{dz}{r^{\alpha p}(x,z)}\right]^{1/p} \left[\int\limits_B^{(m)} \lambda^q(z)\, dz\right]^{1/q};$$

(7.23) follows when it is noted that $\alpha p < m$.

As a consequence of (6.9a), (6.6c)

$$(1_0) \qquad F^*(z) = \int\limits_D^{(n)} f(x,y)\, v(x,z;y)\, \varkappa^{-1}(z,y)\, dx\, dy.$$

Now $v(x,z;y) = 0$ for (x,y) exterior $D^\varrho(z)$; on the other hand, $D^\varrho(z)$ is in the „cylinder" C_z (7.21b) (cf. the text after (4.9d)); hence D in (1_0) may be replaced by C_z. Accordingly by (7.13c), (7.13a) and (7.21a)

$$|F^*(z)| < c^* a_0^{m^2-m-1}(z) \int\limits_{C_z}^{(n)} r^{2-m}(x,z)\, |f(x,y)|\, dx\, dy <$$

$$< c^* a_0^{m^2-m-1} f^0(z) \int r^{2-m}(x,z)\, dx,$$

the last integral being over the m-sphere $r(x,z) \leqslant d(z)/2$. Thus on taking for dx

$r^{m-1} dr\, d\Omega$ ($d\Omega$ = element of surface of unit m-sphere),

we obtain

$$F^*(z) < c^* f_0(z) \quad (z \text{ in } B).$$

By virtue of the above and of (6.16b), (7.21d)

$$(2_0) \qquad |F(z,y)| < c^* f_0(z) \quad ((z,y) \text{ in } D).$$

By (7.1), (7.1a), the formula preceding Theorem 7.20 and (7.22)

$$(3_0) \qquad |T(x,\eta;z,y)| < c^* r^{-\alpha}(x,z)\, \tau(z).$$

Hence by (2_0), on writing $F^{(1)}(z,y) = F \circ T$, we have

$$\left|F^{(1)}(z,y)\right| = \left|\overset{(n)}{\int_D} F(x,\eta)\, T(x,\eta;z,y)\, dx\, d\eta\right|$$

$$< c^* \overset{(n)}{\int_D} f_0(x)\, \tau(z) r^{-\alpha}(x,z)\, dx\, d\eta = c^* \tau(z) \overset{(m)}{\int_B} \frac{f_0(x)\, dx}{r^\alpha(x,z)};$$

thus by (7.21c) and (7.23)

$$(4_0) \qquad |F^{(1)}(z,y)| < c^* \tau(z).$$

On writing $F^{(2)}(z,y) = F \circ T^{[2]}$, one has

$$F^{(2)}(z,y) = F^{(1)} \circ T;$$

by (3_0), (4_0) it is inferred that

$$\left|F^{(2)}(z,y)\right| = \left|\overset{(n)}{\int_D} F^{(1)}(x,\eta)\, T(x,\eta;z,y)\, dx\, d\eta\right|$$

$$< c^* \overset{(n)}{\int_D} \tau(x)\, \tau(z)\, r^{-\alpha}(x,z)\, dx\, d\eta = c^* \tau(z) \overset{(m)}{\int_B} \frac{\tau(x)\, dx}{r^\alpha(x,z)};$$

as $\tau(z)$ is L_q, by (7.23) it is deduced that

$$|F^{(2)}(z,y)| < c^* \tau(z).$$

On letting

$$F^{(j)}(z,y) = F \circ T^{[j]} \quad (j = 1, \dots, \nu),$$

we prove, in general,

$$(5_0) \qquad |F^{(j)}(z,y)| < c^* \tau(z) \quad ((z,y) \text{ in } D);$$

on the other hand, by (7.2b)

$$F_\nu(z,y) = F(z,y) + F^{(1)}(z,y) + \dots + F^{(\nu)}(z,y);$$

whence (2_0), (5_0) result in

$$|F_\nu(z,y)| < c^*(f_0(z) + \tau(z)) \quad (\text{cf. } (7.22), (7.21\text{c})).$$

Since f_0, τ are L_q, the truth of the theorem ensues.

GÉNÉRALISATION DES ÉQUATIONS DE BONNET-KOWALEWSKI DANS L'ESPACE À UN NOMBRE ARBITRAIRE DE DIMENSIONS

Par St. Gołąb (Kraków)

Je dédie ce travail à la mémoire de mon Maître Antoni Hoborski, mort au camp de concentration de Sachsenhausen le 9 II 1940.

Introduction

Les équations de Frenet-Serret furent maintes fois généralisées dans toutes les directions possibles aussi bien s'il s'agit d'un nombre plus grand de dimensions que du genre de l'espace enveloppant. (W. F. Meyer, W. Blaschke, L. Bianchi, J. L. Synge, A. J. Mc Connell, E. Cartan, V. Hlavatý, J. Haantjes). Les équations de Frenet furent également généralisées dans ce sens qu'on les établit non seulement pour les courbes, mais aussi pour les espaces aux dimensions multiples plongés dans l'espace donné (G. Ricci, H. Kühne, C. Burstin, W. Mayer, J. A. Schouten, E. R. van Kampen, E. H. Cutler).

Une direction de généralisation n'a pas encore été *utilisée* quoique déjà abordée. S'il s'agit notamment du cas où l'on considère les courbes situées sur une hypersurface plongée dans un certain espace *métrique* (euclidien ou riemannien). Dans ce cas, grâce au fait qu'à tout point d'une telle courbe est attaché (lié) à côté du vecteur unitaire tangent encore un autre vecteur normal à l'hypersurface, il existe la possibilité

de définir un autre n-èdre à la Frenet lié à la courbe d'une manière intrinsèque. Une modification des équations de Frenet ainsi obtenue figure explicitement chez G. KOWALEWSKI [1]) pour les courbes situées sur les surfaces plongées dans l'espace euclidien à trois dimensions. Dans les équations, qui s'y rapportent, apparaissent d'une manière la plus naturelle (s'il s'agit du point de vue analytique) les courbures — normale et géodésique ainsi que la torsion géodésique. Les équations de KOWALEWSKI apparaissent, quoique peu clairement, même chez BONNET — un des créateurs des notions de courbure et de torsion géodésique. Au cours de la démonstration de la proposition de CODAZZI BONNET introduit 6 grandeurs qui jouent le rôle des coefficients de rotation et qui sont intimément liées aux seconds membres des équations de KOWALEWSKI (les seconds membres des équations (1)). Pareillement, on pourrait considérer les relations de LAGUERRE comme les prototypes des équations de KOWALEWSKI.

Un des buts du présent travail est précisément la généralisation des équations de KOWALEWSKI au cas des éspaces riemanniens à un nombre quelconque de dimensions. Les équations généralisées se trouvent dans les formules (60). Pour arriver aux équations il fallait introduire la notion de systèmes *préférés*. Dans l'espace à 3 dimensions les systèmes préférés sont déterminés univoquement; par contre dans les éspaces aux dimensions multiples ils ne le sont pas. La question du rapport mutuel des systèmes préférés sera le sujet de mon travail ultérieur. Dans les équations (60) figurent $2n-3$ invariants que j'appelle *courbures hypersuperficielles* de la courbe et qui sont une généralisation des courbures normale et géodésique et de la torsion géodésique (pour $n=3$). A l'aide de ces courbures on peut facilement définir les lignes de courbure, les lignes asymptotiques des divers ordres et les lignes géodésiques des différents ordres. Cette dernière notion, qui est une généralisation de celle des lignes géodésiques ordinaires, n'a pas encore été, semble-t-il, considérée. Les courbures ordinaires

[1]) G. Kowalewski, *Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen*. Walter de Gruyter 1931, p. 91, formules (26'). M. Kowalewski dit que les équations (1) pourraient être nommées avec beaucoup de raison équations de Darboux.

d'une courbe s'expriment univoquement par leurs courbures hypersuperficielles (quoique une déduction effective des formules générales est pour le moment une question ouverte); le problème inverse n'est pas, en général, possible.

Dans le § 7 j'introduis la notion de la *B*-courbure, notion que j'avais introduite déjà en 1934 [2]); un travail plus grand consacré à cette notion n'a pas encore été mis sous une forme définitive et n'est pas paru jusqu'à présent. J'examine ensuite le rapport de cette courbure aux courbures hypersuperficielles.

Le § 9 contient une suite de propositions donnant les relations entre les notions des lignes géodésiques, asymptotiques et de courbure d'une part et l'*ordre de platitude* — d'autre part. Enfin le § 10 s'occupe d'une manière détaillée du cas particulier ($n=3$) des courbes situées sur les surfaces plongées dans l'espace riemannien à trois dimensions.

La définition des courbures hypersuperficielles au sens métrique sera le sujet d'un travail à part. Il en sera de même de la question de l'existence et de l'unicité d'une courbe dont les courbures hypersuperficielles sont données d'avance.

§ 1. Les équations de Bonnet-Kowalewski

Soit une surface V_2 plongée dans l'espace à trois dimensions R_3. Considérons sur cette surface une courbe C. Outre le trièdre de Frenet nous pouvons construire pour cette courbe un autre trièdre orthogonal, lié étroitement à la courbe C et exprimant le fait que la courbe C n'est pas envisagée comme plongée directement dans R_3, mais comme située sur la surface V_2. Le second trièdre aura pour premier vecteur le vecteur-unité $\boldsymbol{t}_1$ tangent à C (de même que le trièdre de Frenet-Serret), pour troisième vecteur $\boldsymbol{t}_3$ le vecteur-unité normal à la surface V_2 (convenablement orientée) et enfin pour deuxième vecteur $\boldsymbol{t}_2$ le complément au système orthogonal. La surface V_2 étant orientée, le sens du vecteur $\boldsymbol{t}_2$ peut être fixé d'une façon univoque au moyen du postulat que le trièdre $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)$ doit posséder la même orientation, que le trièdre d'axes

[2]) S. Gołąb, *Über die affinen Invarianten einer Kurve der X_p, die in einer L_n eingebettet ist.* Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis in Moskau IV (1937), p. 360—362.

du système de coordonnées. En décomposant les champs dérivés dt_i/ds $(i=1,2,3)$ en composantes du système de repère local (t_1, t_2, t_3) nous obtiendrons les équations analogues à celles de Frenet à savoir

$$(1)\qquad \left|\begin{aligned} \frac{dt_1}{ds} &= \alpha t_2 + \gamma t_3 \\ \frac{dt_2}{ds} &= -\alpha t_1 + \beta t_3. \\ \frac{dt_3}{ds} &= -\gamma t_1 - \beta t_2 \end{aligned}\right.$$

Contrairement aux équations de Frenet dans lesquelles interviennent *deux* scalaires, les équations (1) renferment *trois* coefficients scalaires α, β, γ qui sont, le long de la courbe C, les fonctions de l'arc s, qui possèdent leurs désignations et dont la signification géométrique est bien connue. Le coefficient α est dit la *courbure géodésique*; γ la *courbure normale* et β la *torsion géodésique* de la courbe C.

Nous appellerons dans la suite ces trois coefficients — *courbures superficielles* de la courbe C en les distinguant des courbures ordinaires $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$. L'annulation de ces courbures superficielles nous fournit la simple caractéristique des courbes spéciales, situées sur la surface V_2.

Nous aurons en particulier

(2) $\alpha \equiv 0$ pour les lignes géodésiques,

(3) $\beta \equiv 0$ pour les lignes de courbure,

(4) $\gamma \equiv 0$ pour les lignes asymptotiques.

Les équations (1) et les relations (2)—(4) nous conduisent immédiatement aux propositions suivantes:

(5) *Si* $\alpha \equiv 0$ *et* $\beta \equiv 0$, *la courbe C est une courbe plane*

(6) *Si* $\gamma \equiv 0$ *et* $\beta \equiv 0$, *la courbe C est une courbe plane*

(7) *Si* $\alpha \equiv 0$ *et* $\gamma \equiv 0$, *la courbe C est une ligne droite.*

Nous obtenons ainsi une démonstration rapide des théorèmes bien connus dans la géométrie différentielle classique:

Théorème 1. *Si la courbe C est une géodésique et une ligne de courbure simultanément, elle est une ligne plane.*

Théorème 2. *Si la courbe C est asymptotique et une ligne de courbure simultanément, elle est une ligne plane.*

Théorème 3. *Si la courbe C est géodésique et asymptotique à la fois, elle est une ligne droite.*

§ 2. n-èdre mobile des vecteurs-unités mutuellement orthogonaux lié à une courbe située dans l'espace riemannien à n dimensions

Considérons un espace riemannien V_n à n dimensions. Supposons que le tenseur fondamental a_{ik} soit réel, qu'il possède le rang égal à n et qu'il soit défini positivement (on pourrait se passer de cette dernière hypothèse).

Etant donnée une courbe regulière C dans l'espace V_n nous pourrons définir le long de C le n-èdre mobile de Frenet qui est une généralisation naturelle du résultat classique de Frenet. Nous désignons (d'après MM. Schouten et Struik) les vecteurs de ce repère par:

$$\underset{k}{i} \qquad (k=1,2,\dots,n) \tag{8}$$

et par le symbole D l'opération de la différentiation covariante (par rapport à l'arc s de la courbe C considéré comme paramètre). Les équations de Frenet peuvent être alors mises sous la forme suivante:

$$D\underset{k}{i} = -\varkappa_{k-1}\cdot \underset{k-1}{i} + \varkappa_k \cdot \underset{k+1}{i} \qquad (k=1,\dots,n), \tag{9}$$

où nous avons posé, pour abréger:

$$\varkappa_0 = 0, \quad \varkappa_n = 0, \tag{10}$$

$$\underset{1}{i} = \frac{dx}{ds} \quad \text{(vecteur-unité tangent à } C). \tag{11}$$

Les vecteurs (8) ne seront déterminés d'une façon univoque que si toutes les courbures

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{n-1} \tag{12}$$

sont différentes de zéro. Si en particulier

$$\begin{cases} \varkappa_{r+1} \neq 0, \\ \varkappa_r = \varkappa_{r+1} = \dots = \varkappa_{n-1} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

dans ce cas, les vecteurs $\underset{1}{\boldsymbol{i}},\ldots,\underset{r}{\boldsymbol{i}}$ sont définis univoquement. Il n'en sera pas de même des vecteurs complémentaires $\underset{r+1}{\boldsymbol{i}},\ldots,\underset{n}{\boldsymbol{i}}$ que l'on peut choisir de plusieures manières pourvu que les équations (9) soient satisfaites. Nous appellerons le nombre r d'équations (13) le *rang* (où *l'ordre*) *de platitude* de la courbe C. Conformément à cette définition, une ligne géodésique dans V_n aura le rang de platitude égal à $1\,(r=1)$. Une courbe possédant toutes les courbures (12) différentes de zéro aura le rang de platitude le plus élevé possible $r=n$. Remarquons que si la courbure $\varkappa_r$ s'annule identiquement, toutes les courbures suivantes s'annulent automatiquement.

Il est intéressant de remarquer que l'on a pas introduit, jusqu'ici, un terme désignant le nombre r. MM. J. A. Schouten et D. J. Struik [3]) parlent dans leur livre, des *points d'inflexion* d'un ordre déterminé, sans introduire un terme spécial pour désigner l'ordre maximum des points d'inflexion d'une courbe. M. E. Cartan appelle „courbes à torsion nulle" les courbes pour lesquelles $r=2$. Nous les appellerons courbes planes.

Le repère de Frenet est un des plusieurs n-èdres possibles composés des vecteurs unités mutuellement orthogonaux liés d'une manière intrinsèque à chaque point de la courbe C.

Supposons maintenant qu'a tout point de la courbe C soit associé le n-èdre tout à fait arbitraire formé de vecteurs unitaires et mutuellement orthogonaux

$$\underset{k}{\boldsymbol{t}} \qquad (k=1,\ldots,n), \tag{14}$$

en supposant uniquement que ce champ de n-èdres soit suffisamment régulier pour que chaque champ verctoriel (14) soit (suivant le besoin) différentiable jusqu'à certain ordre. Puisque le système (14) forme, en vertu de la supposition même, un système de vecteurs linéairement indépendants entre eux, chacun des champs dérivés

$$D\underset{k}{\boldsymbol{t}} \tag{15}$$

---

[3]) J. A. Schouten — D. J. Struik, *Einführung in die n ueren Methoden der Differentialgeometrie II*. Noordhoff (1938), p. 14.

peut s'exprimer linéairement et homogénement à l'aide des vecteurs (14); on aura ainsi les relations

$$D\underset{k}{\boldsymbol{t}} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \underset{j}{\boldsymbol{t}} \qquad (k = 1, \dots, n). \tag{16}$$

Posons nous la question comment s'exprimera-t-il au moyen des coefficients a_{kj} le fait que les vecteurs (14) sont unitaires et mutuellement ortogonaux entre eux. Les relations cherchées découleront de la propriété connue que la différentiation covariante du produit scalaire se fait suivant la même règle que la différentiation ordinaire. Prenons en considération le produit scalaire de deux vecteurs de la suite (14)

$$\underset{k}{\boldsymbol{t}} \cdot \underset{j}{\boldsymbol{t}}.$$

Les vecteurs étant unitaires et mutuellement orthogonaux on aura:

$$\underset{k}{\boldsymbol{t}} \cdot \underset{j}{\boldsymbol{t}} = \delta_{kj}, \tag{17}$$

où δ_{kj} est le symbole connu de KRONECKER égal à $+1$ si $k = j$ et à zéro si $k \neq j$. La dérivée covariante d'une grandeur scalaire étant égale à la dérivée ordinaire de cette grandeur, les relations (17) donnent

$$(D\underset{k}{\boldsymbol{t}}) \cdot \underset{j}{\boldsymbol{t}} + \underset{k}{\boldsymbol{t}} \cdot D\underset{j}{\boldsymbol{t}} = 0. \tag{18}$$

De là, en particulier, pour $j = k$ on a $(D\underset{k}{\boldsymbol{t}}) \cdot \underset{k}{\boldsymbol{t}} + \underset{k}{\boldsymbol{t}} \cdot D\underset{k}{\boldsymbol{t}} = 0$, c'est à dire

$$\underset{k}{\boldsymbol{t}} \cdot D\underset{k}{\boldsymbol{t}} = 0 \qquad (k = 1, \dots, n). \tag{19}$$

De (16), (17), (19) on obtient

$$\underset{k}{\boldsymbol{t}} \cdot D\underset{k}{\boldsymbol{t}} = \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} \underset{j}{\boldsymbol{t}}) \cdot \underset{k}{\boldsymbol{t}} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} (\underset{j}{\boldsymbol{t}} \cdot \underset{k}{\boldsymbol{t}}) = \sum_{j} a_{kj} \cdot \delta_{jk} = a_{kk} = 0,$$

c'est à dire

$$a_{kk} = 0 \qquad (k = 1, \dots, n). \tag{20}$$

Ecrivons à côté de (16):

$$D\underset{k}{\boldsymbol{t}} = \sum_i a_{ki} \underset{i}{\boldsymbol{t}}$$

la relation:

$$D\underset{j}{\boldsymbol{t}} = \sum_i a_{ji} \underset{i}{\boldsymbol{t}}$$

et multiplions scalairement la première de ces relations par $\underset{j}{\boldsymbol{t}}$, la seconde par $\underset{k}{\boldsymbol{t}}$ et ajoutons les en tenant compte de (18) et (17). Nous obtiendrons:

$$0 = \underset{j}{\boldsymbol{t}} \cdot D\underset{k}{\boldsymbol{t}} + \underset{k}{\boldsymbol{t}} \cdot D\underset{j}{\boldsymbol{t}} = \sum_i (a_{ki} \underset{i}{\boldsymbol{t}} \cdot \underset{j}{\boldsymbol{t}} + a_{ji} \underset{i}{\boldsymbol{t}} \cdot \underset{k}{\boldsymbol{t}}) =$$
$$= \sum_i (a_{ki} \delta_{ij} + a_{ji} \delta_{ik}) = a_{kj} + a_{jk},$$

c'est à dire

(21) $$a_{kj} + a_{jk} = 0 \qquad (k, j = 1, \ldots, n, \;\; k \neq j).$$

Les relations (20) et (21) montrent que le déterminant des coefficients a_{kj} et obliquement symétrique. Les relations (20) et (21) peuvent être récrites sous une forme plus simple:

(22) $$a_{kj} + a_{jk} = 0 \qquad (k, j = 1, \ldots, n).$$

Les relations (20) expriment que la dérivée (covariante) du champ des vecteurs unitaires est toujours perpendiculaire au champ donné (à moins qu'elle ne soit un champ qui s'annule identiquement).

Si nous prenons en particulier

(23) $$\underset{k}{\boldsymbol{t}} = \underset{k}{\boldsymbol{i}}$$

nous aurons (comme cela résulte de la comparaison des relations (16) avec (9)):

(24) $$\left| \begin{array}{l} a_{kk+1} = \varkappa_k \\ a_{kk-1} = -\varkappa_{k-1} \\ a_{kj} = 0 \;\text{ pour }\; j \neq k-1,\; k+1, \end{array} \right.$$

d'où on voit facilement que les relations (22) sont remplies.

Du théorème général d'existence des intégrales du système d'équations linéaires du premier ordre résulte que si l'on se

donne dans un certain point Ξ de l'espace à n dimensions n vecteurs unitaires mutuellement orthogonaux $\overset{0}{\underset{k}{t}}$ et $\binom{n}{2}$ fonctions a_{kj} du paramètre s remplissant les relations (22), il existera dans ce cas une seule et unique courbe C passant par Ξ et (le long de C) un seul et unique système de vecteurs $\underset{k}{t}$ remplissant l'équation (16) et les conditions initiales $\underset{k}{t}(0)=\overset{0}{\underset{k}{t}}$; en outre le paramètre s est l'arc pour la courbe C.

§ 3. Courbes sur l'hypersurface à $n-1$ dimensions plongée dans l'espace V_n

Soit un espace V_n comme dans le § précédent. Envisageons dans cet espace une hypersurface plongée V_{n-1} donnée à l'aide d'une représentation paramétrique:

$$\xi^k=\varphi^k(\eta', \ldots, \eta^{n-1}) \qquad (k=1,\ldots,n). \tag{25}$$

Il est bien connu que la métrique de l'espace entourant V_n induit d'une façon univoque une métrique dans l'espace plongé V_{n-1} qui par là même devient un espace riemannien. Si l'on suppose l'existence d'un hyperplan tangent dans chaque point à V_{n-1} $\Bigl($il suffit pour cela de supposer la continuité des dérivées partielles $\dfrac{\partial\varphi^k}{\partial\eta^a}$ et que le tableau $\left\|\dfrac{\partial\varphi^k}{\partial\eta^a}\right\|$ soit du rang $(n-1)\Bigr)$, nous pourrons déterminer dans chaque point de l'hypersurface V_{n-1} le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ normal à V_{n-1}.

La lettre C désignera comme avant la courbe située sur l'hypersurface V_{n-1}. Par E_{n-1} nous désignerons l'hyperplan tangent à V_{n-1} (l'hypersurface géodésique et tangente à V_{n-1} au point envisagé).

I. La courbe C sera dite *asymptotique d'ordre* p, si les vecteurs

$$\underset{1}{\boldsymbol{i}}, \ldots, \underset{p}{\boldsymbol{i}}$$

sont dans E_{n-1} tandis que le vecteur $\underset{p+1}{\boldsymbol{i}}$ ne se trouve pas dans E_{n-1} ou bien si C est asymptotique d'ordre $p-1$ et $\varkappa_p=0$.

préféré ou *distingué*. Pour démontrer l'existence d'un système préféré, nous partirons d'un système quelconque $\underset{k}{\boldsymbol{t}}$ ne remplissant que les suppositions (31), (28) et (29) et nous désignons le système cherché par

(34) $$\underset{1}{\boldsymbol{t}}^*, \underset{2}{\boldsymbol{t}}^*, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}^*, \underset{n}{\boldsymbol{t}}^*.$$

Il est évident que du moment que

(35) $$\underset{1}{\boldsymbol{t}}^* = \underset{1}{\boldsymbol{t}}, \quad \underset{n}{\boldsymbol{t}}^* = \underset{n}{\boldsymbol{t}}$$

on aura les relations

(36) $$\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}^* = \sum_{\nu=2}^{n-1} \gamma_{\lambda\nu} \underset{\nu}{\boldsymbol{t}} \qquad (\lambda = 2, \ldots, n-1);$$

il s'agit donc de montrer qu'il est possible de déterminer les coefficients (scalaires)

(37) $$\gamma_{\lambda\nu}$$

de manière que le système (34) soit préféré.

Les vecteurs $\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}$ aussi bien que les vecteurs $\underset{2}{\boldsymbol{t}}^*, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}^*$ devant être unitaires et orthogonaux, les coefficients (37) doivent remplir les conditions connues d'orthogonalité

(38) $$\sum_{\mu=2}^{n-1} \gamma_{\lambda\mu} \gamma_{\nu\mu} = \delta_{\lambda\nu}, \quad \sum_{\mu=2}^{n-1} \gamma_{\mu\lambda} \gamma_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\nu}.$$

Nous allons employer dans la suite les lettres latines, pour les indices parcourant la suite: $1, 2, \ldots, n$, et les lettres grecques pour les indices parcourant la suite: $2, \ldots, n-1$

(39) $$\begin{cases} i, j, k, l, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1, n, \\ \lambda, \mu, \nu, \varrho, \ldots = 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Les équations

(40) $$D\underset{k}{\boldsymbol{t}}^* = \sum_{i} a^*_{ki} \underset{i}{\boldsymbol{t}}^*$$

en tenant compte de la condition

(41) $$a^*_{\lambda\mu} \equiv 0$$

prendront l'aspect suivant:

$$
(42) \qquad \left| \begin{aligned}
D\underset{1}{\boldsymbol{t}}^* &= a_{11}^* \underset{1}{\boldsymbol{t}} + a_{1n}^* \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \sum_{\lambda\mu} a_{1\lambda}^* \gamma_{\lambda\mu} \underset{\mu}{\boldsymbol{t}} \\
D\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}^* &= a_{\lambda 1}^* \underset{1}{\boldsymbol{t}} + a_{\lambda n}^* \underset{n}{\boldsymbol{t}} \\
D\underset{n}{\boldsymbol{t}}^* &= a_{n1}^* \underset{1}{\boldsymbol{t}} + a_{nn}^* \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \sum_{\lambda\mu} a_{n\lambda}^* \gamma_{\lambda\mu} \underset{\mu}{\boldsymbol{t}}.
\end{aligned} \right.
$$

D'autre part, nous avons

$$
(43) \qquad \left| \begin{aligned}
D\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}^* = D\Big\{\sum_{\mu} \gamma_{\lambda\mu} \underset{\mu}{\boldsymbol{t}}\Big\} &= \sum_{\mu} \Big\{\gamma'_{\lambda\mu} \underset{\mu}{\boldsymbol{t}} + \gamma_{\lambda\mu} D\underset{\mu}{\boldsymbol{t}}\Big\} = \\
&= \sum_{\mu} \Big\{\gamma'_{\lambda\mu} \underset{\mu}{\boldsymbol{t}} + \gamma_{\lambda\mu} \sum_{j} a_{\mu j} \underset{j}{\boldsymbol{t}}\Big\} \\
&= \sum_{\mu} \Big\{\gamma'_{\lambda\mu} \underset{\mu}{\boldsymbol{t}} + \sum_{\nu} \gamma_{\lambda\mu} a_{\mu\nu} \underset{\nu}{\boldsymbol{t}} + \gamma_{\lambda\mu} a_{\mu 1} \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \gamma_{\lambda\mu} a_{\mu n} \underset{n}{\boldsymbol{t}}\Big\} \\
&= \sum_{\mu} \gamma'_{\lambda\mu} \underset{\mu}{\boldsymbol{t}} + \sum_{\mu\nu} \gamma_{\lambda\mu} a_{\mu\nu} \underset{\nu}{\boldsymbol{t}} + \sum_{\mu} \Big\{\gamma_{\lambda\mu} a_{\mu 1} \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \gamma_{\lambda\mu} a_{\mu n} \underset{n}{\boldsymbol{t}}\Big\} \\
&= \sum_{\mu} \Big\{\gamma'_{\lambda\mu} + \sum_{\nu} \gamma_{\lambda\nu} a_{\nu\mu}\Big\} \underset{\mu}{\boldsymbol{t}} + \sum_{\mu} \gamma_{\lambda\mu} \big(a_{\mu 1} \underset{1}{\boldsymbol{t}} + a_{\mu n} \underset{n}{\boldsymbol{t}}\big)\ ^{5}).
\end{aligned} \right.
$$

En outre on a

$$
(44) \qquad \left| \begin{aligned}
D\underset{1}{\boldsymbol{t}}^* = D\underset{1}{\boldsymbol{t}} &= a_{11} \underset{1}{\boldsymbol{t}} + a_{1n} \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \sum_{\mu} a_{1\mu} \underset{\mu}{\boldsymbol{t}} \\
D\underset{n}{\boldsymbol{t}}^* = D\underset{n}{\boldsymbol{t}} &= a_{n1} \underset{1}{\boldsymbol{t}} + a_{nn} \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \sum_{\mu} a_{n\mu} \underset{\mu}{\boldsymbol{t}}.
\end{aligned} \right.
$$

En comparant (42) avec les formules (43)—(44) nous obtenons, à cause de l'indépendance linéaire des vecteurs $\underset{1}{\boldsymbol{t}},\ldots,\underset{n}{\boldsymbol{t}}$ les relations

$$
(45) \qquad \left| \begin{aligned}
a_{11}^* &= a_{11} \\
a_{1n}^* &= a_{1n} \\
a_{n1}^* &= a_{n1} \\
a_{nn}^* &= a_{nn}
\end{aligned} \right.
$$

$$
(46) \qquad \left| \begin{aligned}
\sum_{\lambda} a_{1\lambda}^* \gamma_{\lambda\mu} &= a_{1\mu} \\
\sum_{\lambda} a_{n\lambda}^* \gamma_{\lambda\mu} &= a_{n\mu}
\end{aligned} \right. \qquad (\mu = 2,\ldots,n-1)
$$

$$
(47) \qquad \gamma'_{\lambda\mu} + \sum_{\nu} \gamma_{\lambda\nu} a_{\nu\mu} = 0
$$

$$
(48) \qquad \left| \begin{aligned}
\sum_{\mu} \gamma_{\lambda\mu} a_{\mu 1} &= a_{\lambda 1}^* \\
\sum_{\mu} \gamma_{\lambda\mu} a_{\mu n} &= a_{\lambda n}^*
\end{aligned} \right. \qquad (\lambda = 2,\ldots,n-1).
$$

---

[5]) Nous désignons pa l'accent la dérivée ordinaire par rapport au paramètre s.

Les relations (48) dépendent de (46). En multipliant les deux membres de (46) par $\gamma_{\nu\mu}$ et en sommant par rapport à μ on obtient:

$$\sum_{\mu} a_{1\mu}\,\gamma_{\nu\mu} = \sum_{\lambda\mu} a^*_{1\lambda}\,\gamma_{\lambda\mu}\,\gamma_{\nu\mu} = \sum_{\lambda} a^*_{1\lambda}\,\delta_{\lambda\nu} = a^*_{1\nu}$$
$$\sum_{\mu} a_{n\mu}\,\gamma_{\nu\mu} = \sum_{\lambda\mu} a^*_{n\lambda}\,\gamma_{\lambda\mu}\,\gamma_{\nu\mu} = \sum_{\lambda} a^*_{n\lambda}\,\delta_{\lambda\nu} = a^*_{n\nu}.$$

D'autre part

$$\sum_{\mu} a_{1\mu}\,\gamma_{\nu\mu} = -\sum_{\mu} a_{\mu 1}\,\gamma_{\nu\mu}, \quad \sum_{\mu} a_{n\mu}\,\gamma_{\nu\mu} = -\sum_{\mu} a_{\mu n}\,\gamma_{\nu\mu},$$
$$a^*_{1\nu} = -\,a^*_{\nu 1}, \quad a^*_{n\nu} = -\,a^*_{\nu n};$$

on obtient ainsi les relations (48). Pareillement, de (48) on peut obtenir (46). Nous pouvons donc omettre les relations (46) et en tenant compte de ce que $a_{11} = a_{nn} = 0$ et que $a_{n1} + a_{1n} = 0$, il nous restent les relations

$$(49) \qquad \begin{cases} a^*_{1n} = a_{1n} \\ a^*_{\lambda 1} = \sum_{\mu} \gamma_{\lambda\mu}\,a_{\mu 1} \\ a^*_{\lambda n} = \sum_{\mu} \gamma_{\lambda\mu}\,a_{\mu n} \end{cases}$$

ainsi que

$$(50) \qquad \gamma'_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu}\,\gamma_{\lambda\nu}.$$

Les relations (50) sont essentielles dans nos raisonnements ultérieures, car si nous montrons que l'on peut déterminer $\gamma_{\lambda\mu}$ (le long de C) de manière que les relations (50) soient remplies (et évidemment (38)), on pourra considérer (49) comme les définitions des a^*_{ij} cherchés.

Le système (50) est un système de $(n-2)^2$ équations différentielles linéaires ordinaires du premier ordre à $(n-2)^2$ fonctions inconnues $\gamma_{\lambda\mu}$.

On sait que, si l'on donne les conditions initiales, un tel système possède une seule et unique solution. Donnons nous les conditions initiales suivantes:

$$(51) \qquad (\gamma_{\lambda\mu})_{s=0} = (\gamma_{\lambda\mu})_0 = \delta_{\lambda\mu}$$

et désignons par $\gamma_{\lambda\mu}$ la seule et unique solution du système (50) correspondant aux conditions initiales (51). Il s'agit de montrer

que cette solution remplit identiquement par rapport à s les conditions:

$$\sum_\lambda \gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\lambda\nu} \equiv \delta_{\mu\nu}. \tag{52}$$

Nous désignerons pour cela

$$\Gamma_{\lambda\mu} = \sum_\nu \gamma_{\nu\lambda}\gamma_{\nu\mu} \tag{53}$$

et calculerons

$$\Gamma'_{\lambda\mu} = \sum_\nu \{\gamma'_{\nu\lambda}\gamma_{\nu\mu} + \gamma'_{\nu\mu}\gamma_{\nu\lambda}\}. \tag{54}$$

$\gamma_{\lambda\mu}$ étant une solution du système (50), nous pouvons éliminer γ' des relations (50) et obtenir que:

$$\Gamma'_{\lambda\mu} = \sum_\nu \{\gamma_{\nu\mu}\sum_\varrho a_{\lambda\varrho}\gamma_{\nu\varrho} + \gamma_{\nu\lambda}\sum_\varrho a_{\mu\varrho}\gamma_{\nu\varrho}\} =$$
$$= \sum_{\nu\varrho}\{\gamma_{\nu\mu}a_{\lambda\varrho} + \gamma_{\nu\lambda}a_{\mu\varrho}\}\gamma_{\nu\varrho},$$

d'où, en tenant compte de (53)

$$\Gamma'_{\lambda\mu} = \sum_\varrho (a_{\lambda\varrho}\Gamma_{\mu\varrho} + a_{\mu\varrho}\Gamma_{\lambda\varrho}). \tag{55}$$

Le système (55) est également un système de $(n-2)^2$ équations linéaires ordinaires du premier ordre par rapport à $(n-2)^2$ inconnues $\Gamma_{\lambda\mu}$.

Les membres droits des équations (55) étant égaux pour $\Gamma_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}$ en vertu de (21) à

$$\sum_\varrho (a_{\lambda\varrho}\delta_{\mu\varrho} + a_{\mu\varrho}\delta_{\lambda\varrho}) = a_{\lambda\mu} + a_{\mu\lambda} \equiv 0,$$

a solution du système (55) sera, en tenant compte de ce que

$$\Gamma'_{\lambda\mu} = \frac{d\delta_{\lambda\mu}}{ds} \equiv 0,$$

$$\Gamma_{\lambda\mu} \equiv \delta_{\lambda\mu}. \tag{56}$$

D'autre part la solution (53) remplit, à cause de (51), la condition initiale:

$$(\Gamma_{\lambda\mu})_0 = \sum_\nu (\gamma_{\nu\lambda})_0(\gamma_{\nu\mu})_0 = \sum_\nu \delta_{\nu\lambda}\delta_{\nu\mu} = \delta_{\lambda\mu}. \tag{57}$$

Les conditions (57) déterminent univoquement la solution du système (55). Il en résulte l'identité (52) qu'il s'agissait précisement de prouver. Notre proposition est ainsi démontrée.

Il résulte de cette démonstration que si l'on veut, en partant d'un système arbitraire donné a priori (27), obtenir un système préferé (34), il suffit de poser $(\underset{i}{t^*})_0 = (\underset{i}{t})_0$ en un point de la courbe C pour avoir une détermination univoque du système préferé le long de la courbe entière C.

Nous supposons dans la suite que le système (27) est déjà un système préféré c'est à dire que l'on a les relations:

$$\alpha_{\lambda\mu} = 0 \qquad (\lambda, \mu = 2, \ldots, n-1). \tag{58}$$

Nous avons ainsi fait disparaître parmi les n^2 coefficients α_{ik} (n d'entre eux étaient déjà égaux à zéro en vertu de (20)) les $n^2 - 5n + 6$ suivants. Le nombre des coefficients différents (généralement) de zéro se reduira ainsi à $4n-6$. Pour donner une image, on pourrait dire que dans la matrice $\|\alpha_{ik}\|$ seuls les éléments en bordure (excepté les extrémités de la grande diagonale) seront différents de zéro. Tout intérieur de la matrice ne se compose que de zéros.

Nous verrons dans un instant que pour une courbe arbitraire C sur l'hypersurface V_{n-1} il est impossible d'arriver à la disparition de quelques autres coefficients parmi les α_{ik} restants.

Afin d'éviter les coefficients à deux indices, nous allons maintenant introduire quelques désignations abrégées:

Nous désignons notamment par:

$$\left|\begin{array}{l} \alpha_\lambda = \alpha_{1\lambda} \\ \beta_\lambda = \alpha_{\lambda n} \\ \gamma \ = \alpha_{1n} \end{array}\right. \qquad (\lambda = 2, \ldots, n-1). \tag{59}$$

Les équations (16) pour les systèmes préférés auront par suite la forme définitive suivante:

$$\left|\begin{array}{l} D\underset{1}{t} = \sum\limits_{\lambda} \alpha_\lambda \underset{\lambda}{t} + \gamma \underset{n}{t} \\ D\underset{\mu}{t} = -\alpha_\mu \underset{1}{t} + \beta_\mu \underset{n}{t} \\ D\underset{n}{t} = -\gamma \underset{1}{t} - \sum\limits_{\lambda} \beta_\lambda \underset{\lambda}{t} \end{array}\right. \qquad (\mu = 2, \ldots, n-1). \tag{60}$$

Nous allons appeler ces équations — *équations généralisées de Bonnet-Kowalewski*. Puisque pour $n=3$ tout système

$$(\underset{1}{t}, \underset{2}{t}, \underset{3}{t}) = (i, \underset{1}{t}, \underset{2}{n})$$

est système distingué, les équations (60) se réduisent pour $n=3$ aux équations de BONNET-KOWALEWSKI (1).

Nous allons montrer qu'il est *en général* impossible de trouver pour une courbe arbitraire C un système dans lequel on pourrait arriver à faire disparaître identiquement encore certains coefficients de (59).

Nous le démontrerons indirectement en supposant qu'il soit possible de trouver pour *chaque* courbe un système distingué de vecteurs

$$\underset{1}{\bar{t}}, \ldots, \underset{n}{\bar{t}}$$

satisfaisant aux équations de Bonnet-Kowalewski $D\underset{i}{\bar{t}} = \sum_k \bar{\alpha}_{ik} \underset{k}{\bar{t}}$ de façon qu'un au moins des coefficients (59) (barrés) s'annule identiquement. Il suffit de considérer les trois cas suivants:

$$\text{(61)} \qquad \text{I) } \bar{\alpha}_2 \equiv 0, \quad \text{II) } \bar{\gamma} \equiv 0, \quad \text{III) } \bar{\beta}_2 \equiv 0.$$

Supposons en premier lieu que

$$\text{(62)} \qquad \bar{\alpha}_2 \equiv 0.$$

On aurait dans ce cas

$$\text{(63)} \qquad D\underset{2}{\bar{t}} = \bar{\beta}_2 \underset{n}{\bar{t}} = \bar{\beta}_2 \underset{n}{t}.$$

En écrivant:

$$\underset{\lambda}{\bar{t}} = \sum_\mu \Theta_{\lambda\mu} \underset{\mu}{t}$$

on aurait de même

$$\begin{aligned} D\underset{2}{\bar{t}} &= \sum_\mu \{\Theta'_{2\mu} \underset{\mu}{t} + \sum_i \Theta_{2\mu} \alpha_{\mu i} \underset{i}{t}\} = \\ \text{(64)} \qquad &= \sum_\mu \{\Theta'_{2\mu} \underset{\mu}{t} + \Theta_{2\mu} \alpha_{\mu 1} \underset{1}{t} + \Theta_{2\mu} \alpha_{\mu n} \underset{n}{t} + \sum_\lambda \Theta_{2\mu} \alpha_{\mu\lambda} \underset{\lambda}{t}\} = \\ &= \sum_\mu \{\Theta'_{2\mu} \underset{\mu}{t} - \Theta_{2\mu} \alpha_\mu \underset{1}{t} + \Theta_{2\mu} \beta_\mu \underset{n}{t}\}. \end{aligned}$$

En comparant (64) avec (62) on obtient:

$$
\begin{gathered}
\sum_{\mu} \Theta_{2\mu}\, \alpha_{\mu} = 0 \\
\sum_{\mu} \Theta_{2\mu}\, \beta_{\mu} = \overline{\beta}_2 \\
\Theta'_{2\mu} = 0 \quad \text{pour} \quad \mu = 2, \ldots, n-1.
\end{gathered} \tag{65}
$$

La dernière relation nous donne

$$
\Theta_{2\mu} \in \text{Const.} \tag{66}
$$

Si tous les $\Theta_{2\mu}$ étaient égaux à zéro, on aurait une contradiction avec la relation

$$
\sum_{\mu} \Theta_{2\mu}^2 = 1,
$$

qui découle de (38). Les $\Theta_{2\mu}$ n'étant pas tous égaux à zéro, la première des relations (65) donnerait une relation linéaire entre les coefficients

$$
\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}
$$

ce qui ne peut avoir lieu pour *chaque* courbe C. Nous sommes arrivés ainsi à la contradiction.

Supposons maintenant qu'il soit possible d'arriver à ce que pour *chaque* courbe on ait

$$
\overline{\gamma} = 0. \tag{67}
$$

La relation (67) — on le verra dans le paragraphe suivant — montrerait que la courbe C est asymptotique (d'ordre 2) ce qui ne peut pas avoir lieu pour toutes les courbes C. Supposons enfin qu'il soit possible d'avoir pour chaque courbe C:

$$
\overline{\beta}_2 = 0. \tag{68}
$$

En partant, comme dans le cas I) de la relation

$$
D\overline{\underset{2}{t}} = -\overline{\alpha}_2 \underset{1}{t} \tag{69 a}
$$

et en comparant (69 a) avec (64) qui ne changent pas, on obtient

$$
\left|\begin{gathered}
\sum_{\mu} \Theta_{2\mu}\, \alpha_{\mu} = \overline{\alpha}_2 \\
\sum_{\mu} \Theta_{2\mu}\, \beta_{\mu} = 0 \\
\Theta'_{2\mu} = 0.
\end{gathered}\right. \tag{69 b}
$$

La dernière de ces relations donne de nouveau (66) tandis que la seconde donnerait une relation linéaire entre les coefficients β_μ ce qui serait impossible pour chaque courbe C. Ainsi donc nous avons montré que dans le cas général les équations (60) sont les plus simples possibles.

§ 5. Courbures de l'hypersurface de la courbe. Caractéristique des courbes géodésiques, asymptotiques et de celles de courbure à l'aide de leurs courbures de l'hypersurface

Définition. Les scalaires (59) dans les équations (60) sont appelés *courbures de l'hypersurface de la courbe C.*

Le nombre de ces courbures de l'hypersurface est égal à

$$2n-3. \tag{70}$$

Dans l'espace à trois dimensions le nombre de ces courbures sera 3 (c'est la courbure géodésique, la courbure normale et la torsion géodésique) et elles sont déterminées univoquement (sauf les signes pour les α_λ et γ si l'on ne se décide pas de fixer le sens du vecteur normale à la surface)[6]. Pour $n \geqslant 4$ ces courbures ne seront pas, en général, déterminées d'une manière univoque, le nombre de systèmes préférés $(\underset{i}{t})$ étant infini. Posons nous la question comment changent ces courbures de l'hypersurface si nous passons d'un système préféré à un autre $(\underset{i}{\bar{t}})$. La réponse sera donnée par les équations (49) en tenant compte des relations (50). Puisque les a_{ik} nous déterminent déjà le système préféré, on aura $a_{\lambda\mu}=0$ et les relations (50) prendront la forme

$$\gamma'_{\lambda\mu} \equiv 0 \qquad (\lambda, \mu = 2, \ldots, n-1). \tag{71}$$

Il en résulte que

$$\gamma_{\lambda\mu} \in \text{Const}. \tag{72}$$

Les relations (49), par contre, (en tenant compte des désignations (59) et en changeant les étoiles en barres) pourront

---

[6]) Voir le § 10.

être récrites sous la forme suivante:

$$\left\{\begin{aligned}&\bar{\gamma}=\gamma\\&\bar{\alpha}_\lambda=\sum_\mu\gamma_{\lambda\mu}\,\alpha_\mu\\&\bar{\beta}_\lambda=\sum_\mu\gamma_{\lambda\mu}\,\beta_\mu.\end{aligned}\right.\tag{73}$$

Nous voyons que seule la courbure γ est un *invariant absolu*; les courbures α_λ et β_λ subissent, par contre, une transformation linéaire et homogène (la même pour α et β). *Chaque système* (α_μ), (β_μ) *se transforme notamment comme un vecteur contravariant de l'espace à $n-2$ dimensions* si l'on passe du système $(\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}})$ à un autre système préféré $(\underset{\lambda}{\bar{\boldsymbol{t}}})$. Il en résulte en particulier que l'annulation de toutes les courbures α:

$$\alpha_\lambda=0 \quad\text{pour}\quad \lambda=2,\dots,n-1\tag{74}$$

ou l'annulation de toutes les courbures β:

$$\beta_\lambda=0 \quad\text{pour}\quad \lambda=2,\dots,n-1\tag{75}$$

est une propriété *invariante* indépendante du choix du système de préférence.

Nous verrons maintenant comment peut-on exprimer les lignes géodésiques, asymptotiques et celles de courbure à l'aide de courbures de l'hypersurface.

I. Lignes de courbure. En vertu de la définition (26) la condition pour que la ligne soit celle de courbure est que les vecteurs

$$\underset{1}{\boldsymbol{t}},\ \underset{n}{\boldsymbol{t}},\ L\underset{n}{\boldsymbol{t}}\tag{76}$$

dépendent linéairement entre eux. $\underset{1}{\boldsymbol{t}}$ et $\underset{n}{\boldsymbol{t}}$ étant linéairement indépendants entre eux, la condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs (76) soient linéairement dépendants entre eux est que le vecteur

$$D\underset{n}{\boldsymbol{t}}=-\gamma\underset{1}{\boldsymbol{t}}-\sum_\lambda\beta_\lambda\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}\tag{77}$$

dépende linéairement de $\underset{1}{t}$ et $\underset{n}{t}$; il en résulte, à cause de l'indépendance linéaire des vecteurs $\underset{2}{t}, \ldots, \underset{n-1}{t}, \underset{n}{t}$, que l'on doit avoir identiquement

(78) $$\boxed{\beta_\lambda = 0 \text{ pour } \lambda = 2, \ldots, n-1}.$$

Comme nous l'avons constaté sous (75) les relations (78), caractéristiques pour les lignes de courbure, ont un caractère invariant.

Proposition. *La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe C soit une ligne de courbure est que tout champ vectoriel*

(79) $$\underset{2}{t}, \ldots, \underset{n-1}{t}$$

soit un champ developpable le long de la courbe C.

Démonstration. Ecrivons la condition pour que le champ

(80) $$t_\lambda$$

soit developpable.

Cette condition est

(81) $$[\underset{1}{t}, \underset{\lambda}{t}, D\underset{\lambda}{t}] = 0,$$

c'est à dire que

$$[\underset{1}{t}, \underset{\lambda}{t}, -\alpha_\lambda \underset{1}{t} + \beta_\lambda \underset{n}{t}] = 0$$

La dernière condition est équivalante à la relation

$$[\underset{1}{t}, \underset{\lambda}{t}, \beta_\lambda t_n] = 0.$$

Puisque

$$[\underset{1}{t}, \underset{\lambda}{t}, \underset{n}{t}] = \pm 1,$$

on doit avoir

(82) $$\beta_\lambda = 0.$$

Réciproquement, (82) entraine (81), c'est à dire la developpabilité du champ (80). Nous voyons, à cause de (78), que la proposition est juste.

II. Lignes asymptotiques. Supposons que la courbe C soit une ligne asymptotique du second ordre. Cela signifie que l'on a soit

$$\varkappa_1 \equiv 0, \tag{83}$$

c'est à dire que la courbe est géodésique de l'espace V_n, soit $\varkappa_1 \neq 0$. Dans ce cas on aura la détermination univoque du premier vecteur normal $\underset{2}{\boldsymbol{i}}$ (dit vecteur normal principal pour $n=3$) et le vecteur $\underset{2}{\boldsymbol{i}}$ est dans l'hyperplan E_{n-1}.

L'identité (83) équivaut à la relation

$$D\underset{1}{\boldsymbol{i}} = D\underset{1}{\boldsymbol{t}} \equiv 0$$

qui en vertu de la première des relations (60) conduit aux relations

$$\gamma \equiv 0 \quad \text{et} \quad \alpha_\lambda \equiv 0 \quad \text{pour} \quad \lambda = 2, \ldots, n-1. \tag{84}$$

Si, par contre, $\varkappa_1 \neq 0$, on aura $D\underset{1}{\boldsymbol{i}} \neq 0$ et puisque (comme nous l'apprend la première des relations de Frenet-Serret (9))

$$D\underset{1}{\boldsymbol{i}} = \varkappa_1 \cdot \underset{2}{\boldsymbol{i}} \tag{85}$$

il nous suffira d'écrire la condition pour que le vecteur $D\underset{1}{\boldsymbol{i}}$, c'est à dire $D\underset{1}{\boldsymbol{t}}$, soit dans l'hyperplan E_{n-1}. Ceci est équivalent à ce que le vecteur $D\underset{1}{\boldsymbol{t}}$ soit orthogonal au vecteur $\boldsymbol{t} = \underset{n}{\boldsymbol{n}}$. Pour que cela ait lieu, il faut et il suffit (voir la première des relations (60)) que

$$\gamma \equiv 0. \tag{86}$$

Réunissant les deux eventualités (84) et (86), nous dirons que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe C soit asymptotique du second ordre est que l'on ait l'identité:

$$\boxed{\gamma \equiv 0.} \tag{87}$$

Supposons maintenant que la courbe C soit asymptotique du troisième ordre. On aura de nouveau deux eventualités. Ou

bien elle est asymptotique du second ordre et en même temps $\varkappa_2 \equiv 0$, ou $\varkappa_2 \neq 0$ et les vecteurs $\underset{2}{\boldsymbol{i}}, \underset{3}{\boldsymbol{i}}$ sont dans E_{n-1}. Autrement dit, elle doit être asymptotique du second ordre et $\varkappa_2 \equiv 0$ ou bien $\underset{3}{\boldsymbol{i}}$ est dans E_{n-1}. Mais l'identité $\varkappa_2 \equiv 0$ signifie que

$$D\underset{2}{\boldsymbol{i}} = -\varkappa_1 \underset{1}{\boldsymbol{i}}.$$

Revenons à la relation (85) et appliquons aux deux membres de (85) l'opérateur D (en nous souvenant que $\underset{1}{\boldsymbol{i}} = \underset{1}{\boldsymbol{t}}$)

$$D(D\underset{1}{\boldsymbol{i}}) = D(\varkappa_1 \cdot \underset{2}{\boldsymbol{i}})$$

c'est à dire

$$D\{\sum \alpha_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \gamma \underset{n}{\boldsymbol{t}}\} = \varkappa_1' \cdot \underset{2}{\boldsymbol{i}} + \varkappa_1 D\underset{2}{\boldsymbol{i}},$$

de là

$$\sum_\lambda \{\alpha_\lambda' \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \alpha_\lambda D\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \gamma' \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \gamma D\underset{n}{\boldsymbol{t}}\} = \varkappa_1' \cdot \underset{2}{\boldsymbol{i}} - \varkappa_1^2 \underset{1}{\boldsymbol{t}}.$$

La relation (87) devant en tout cas avoir lieu, nous écrivons encore

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \{\alpha_\lambda' \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \alpha_\lambda(-\alpha_\lambda \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \beta_\lambda \underset{n}{\boldsymbol{t}})\} &= \frac{\varkappa_1'}{\varkappa_1} D\underset{1}{\boldsymbol{t}} - \varkappa_1^2 \underset{1}{\boldsymbol{t}} = \\ &= \frac{\varkappa_1'}{\varkappa_1}(\sum_\lambda \alpha_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}) - \varkappa_1^2 \cdot \underset{1}{\boldsymbol{t}}. \end{aligned} \tag{88}$$

$\underset{2}{\boldsymbol{i}}$ étant un vecteur-unité, la formule (85) donne:

$$\varkappa_1 = \sqrt{\sum_\lambda \alpha_\lambda^2 + \gamma^2}. \tag{89}$$

Dans notre cas $\varkappa_1 = \sqrt{\sum_\lambda \alpha_\lambda^2}$ et les expressions $-\varkappa_1^2 \underset{1}{\boldsymbol{t}}$ qui figurent dans les deux membres de l'équation (88) peuvent être supprimées. Puisque $\underset{n}{\boldsymbol{t}}$ ne figure pas dans le second membre de (88), on doit avoir

$$\sum \alpha_\lambda \beta_\lambda \equiv 0. \tag{90}$$

En outre la comparaison des coefficients de $\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}$ dans les deux membres de (88) donne:

$$\alpha_\lambda' = \frac{\varkappa_1'}{\varkappa_1} \alpha_\lambda, \quad \lambda = 2, \ldots, n-1,$$

d'où

$$\frac{a'_\lambda}{a_\lambda} = \frac{\varkappa'_1}{\varkappa_1}$$

c'est à dire que

$$\int \frac{a'_\lambda}{a_\lambda}\, ds = \int \frac{\varkappa'_1}{\varkappa_1}\, ds,$$

ou bien encore

(91) $$a_\lambda = C_\lambda\, \varkappa_1, \quad \text{où les } C_\lambda$$

sont constantes qui, à cause de (89) et (87), doivent verifier les relations

(92) $$\sum_\lambda C_\lambda^2 = 1.$$

En substituant (91) dans (90) et en tenant compte de (92) et de ce que $\varkappa_1 \neq 0$, nous trouvons que β_λ doivent être linéairement dépendants entre eux.

Cherchons maintenant les conditions d'asymptoticité du troisième ordre en considérant la seconde alternative quand $\varkappa_2 \neq 0$. Lorsque $\underset{3}{\boldsymbol{i}}$ doit être situé dans E_{n-1}, $\underset{3}{\boldsymbol{i}}$ doit être orthogonal à $\underset{n}{\boldsymbol{t}}$; mais

$$D\underset{2}{\boldsymbol{i}} = -\varkappa_1 \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \varkappa_2 \underset{3}{\boldsymbol{t}}.$$

Multiplions scalairement les deux membres de cette relation par $\underset{n}{\boldsymbol{t}}$; on aura, en tenant compte de ce que $\underset{1}{\boldsymbol{t}} \cdot \underset{n}{\boldsymbol{t}} = 0$ et que $\underset{3}{\boldsymbol{i}} \cdot \underset{n}{\boldsymbol{t}} = 0$:

(93) $$\underset{n}{\boldsymbol{t}} \cdot D\underset{2}{\boldsymbol{i}} = 0.$$

Puisque $\underset{2}{\boldsymbol{i}}$ est dans E_{n-1} on aura $\underset{2}{\boldsymbol{i}} \cdot \underset{n}{\boldsymbol{t}} = 0$, d'où

(94) $$(D\underset{2}{\boldsymbol{i}}) \cdot \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \underset{2}{\boldsymbol{i}} \cdot D\underset{n}{\boldsymbol{t}} = 0.$$

Les relations (93) et (94) donnent

$$\underset{2}{\boldsymbol{i}} \cdot D\underset{n}{\boldsymbol{t}} = 0$$

ou

$$\underset{2}{\boldsymbol{i}}(-\gamma \underset{1}{\boldsymbol{t}} - \sum_\lambda \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}) = 0$$

ou

$$D\underset{1}{\boldsymbol{t}} \cdot \sum_{\lambda} \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} = 0$$

ou

$$\Big(\sum_{\mu} \alpha_\mu \underset{\mu}{\boldsymbol{t}}\Big) \cdot \Big(\sum_{\lambda} \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}\Big) = 0\,,$$

de là, puisque $\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}},\, \underset{\mu}{\boldsymbol{t}} = \delta_{\lambda\mu}$, on arrive à la relation (90).

Nous voyons donc que la condition d'asymptoticité du troisième ordre (comme celle pour l'asymptoticité du second ordre) pour la seconde eventualité fait partie de la première eventualité. En réunissant les deux eventualités, nous dirons que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe C soit asymptotique du troisième ordre est que l'on ait les identités (87) et (90), c'est à dire que

(95) $$\boxed{\gamma = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda} \alpha_\lambda \beta_\lambda = 0}\,.$$

Nous allons déduire encore les conditions d'asymptoticité du quatrième ordre en laissant au lecteur de traiter le cas général en se servant de la méthode d'induction mathématique. La courbe sera asymptotique du quatrième ordre si elle est asymptotique du troisième ordre et dans ce cas on aura soit $\varkappa_3 = 3$ ou bien le vecteur $\underset{4}{\boldsymbol{i}}$ doit être dans E_{n-1}. Envisageons la première eventualité $\varkappa_3 = 0$. Cela signifie que

(96) $$D\underset{3}{\boldsymbol{i}} = -\varkappa_2 \underset{2}{\boldsymbol{i}}\,;$$

mais

$$\underset{3}{\boldsymbol{i}} = \frac{\varkappa_1 \underset{1}{\boldsymbol{t}} + D\underset{2}{\boldsymbol{i}}}{\varkappa_2} = \frac{\varkappa_1 \underset{1}{\boldsymbol{t}} + D\left(\dfrac{D\underset{1}{\boldsymbol{t}}}{\varkappa_1}\right)}{\varkappa_2} =$$

$$= \frac{\varkappa_1 \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \dfrac{\varkappa_1 D(D\underset{1}{\boldsymbol{t}}) - \varkappa_1' D\underset{1}{\boldsymbol{t}}}{\varkappa_1^2}}{\varkappa_2} =$$

$$= \frac{\varkappa_1 \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \dfrac{1}{\varkappa_1}\Big\{\sum \alpha_\lambda' \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} - \varkappa_1^2 \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \sum \alpha_\lambda \beta_\lambda \underset{n}{\boldsymbol{t}}\Big\} - \dfrac{\varkappa_1'}{\varkappa_1^2} \sum \alpha_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}}{\varkappa_2} =$$

et en tenant compte de (90)

$$=\frac{\frac{1}{\varkappa_1}\sum a'_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} - \frac{\varkappa'_1}{\varkappa_1^2}\sum a_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}}{\varkappa_2} = \frac{\sum\limits_{\lambda}(\varkappa_1 a'_\lambda - \varkappa'_1 a_\lambda)\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}}{\varkappa_1^2\varkappa_2}.$$

Si nous appliquons aux deux membres de cette relation l'opérateur D en désignant pour abréger le coefficient scalaire $\varkappa_1 a'_\lambda - \varkappa'_1 a_\lambda$ par γ_λ et le dénominateur $\varkappa_1^2\varkappa_2$ par μ, on aura

$$(97)\qquad \begin{aligned} D\underset{3}{\boldsymbol{i}} &= D\left\{\frac{\sum \gamma_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}}{\mu}\right\} = \frac{\mu\sum(\gamma'_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \gamma_\lambda D\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}) - \mu'\sum\gamma_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}}{\mu^2} = \\ &= \frac{\sum\limits_{\lambda}(\mu\gamma'_\lambda - \mu'\gamma_\lambda)\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} - \mu\sum\limits_{\lambda}(a_\lambda\gamma_\lambda)\underset{1}{\boldsymbol{t}} + \mu\sum\limits_{\lambda}(\beta_\lambda\gamma_\lambda)\cdot\underset{n}{\boldsymbol{t}}}{\mu^2}. \end{aligned}$$

Le second membre de la relation (96) est égal

$$(98)\qquad -\varkappa_2\underset{2}{\boldsymbol{i}} = -\varkappa_2\frac{D\underset{1}{\boldsymbol{t}}}{\varkappa_1} = -\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\sum_\lambda a_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}.$$

En comparant (97) avec (98), nous obtenons les relations suivantes

$$(99)\qquad \sum a_\lambda\gamma_\lambda = 0, \quad \sum\beta_\lambda\gamma_\lambda = 0$$

et

$$(100)\qquad \frac{\mu\gamma'_\lambda - \mu'\gamma_\lambda}{\mu^2} = -\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}a_\lambda.$$

Revenons aux désignations primitives. Nous obtiendrons

$$(101)\qquad \begin{cases} \varkappa_1\sum a_\lambda a'_\lambda - \varkappa'_1\sum a_\lambda^2 = 0 \\ \varkappa_1\sum\beta_\lambda a'_\lambda - \varkappa'_1\sum a_\lambda\beta_\lambda = 0. \end{cases}$$

La première des relations (101) est remplie automatiquement à cause de ce que dans notre cas

$$(102)\qquad \varkappa_1 = \sqrt{\sum a_\lambda^2}.$$

La seconde des relations (101) donne, en prenant en considération (95) et que $\varkappa_1 \neq 0$:

$$(103)\qquad \sum_\lambda \beta_\lambda a'_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 2, \ldots, n-1).$$

Les relations (100) conduisent aux relations assez compliquées qui sont des équations du second ordre relativement aux coefficients α_λ. Il est inutile de les écrire in extenso puisque dans la seconde partie d'alternative ils n'interviennent plus.

Nous allons voir maintenant à quoi conduit la supposition $\varkappa_3 \neq 0$ et que $\underset{4}{\boldsymbol{i}}$ soit dans E_{n-1}. Nous raisonnerons comme tout à l'heure en partant de la troisième équation de Frenet

$$D\underset{3}{\boldsymbol{i}} = -\varkappa_2 \underset{2}{\boldsymbol{i}} + \varkappa_3 \underset{4}{\boldsymbol{i}}$$

et en la multipliant scalairement par $\underset{n}{\boldsymbol{t}}$. Puisque $\underset{2}{\boldsymbol{i}}$ aussi bien que $\underset{4}{\boldsymbol{i}}$ sont, en vertu de la supposition, dans E_{n-1}, le second membre sera égal à zero; par conséquent aussi

$$\underset{n}{\boldsymbol{t}} \cdot D\underset{3}{\boldsymbol{i}} = 0\,;$$

mais

$$\underset{3}{\boldsymbol{i}} \cdot \underset{n}{\boldsymbol{t}} = 0\,.$$

Les deux dernières relations conduisent donc à ce que

$$\underset{3}{\boldsymbol{i}} \cdot D\underset{n}{\boldsymbol{t}} = 0\,,$$

c'est à dire que

$$\underset{3}{\boldsymbol{i}} \cdot (\sum \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}) = 0\,.$$

De là on aura

$$(\sum_\mu \gamma_\mu \underset{\mu}{\boldsymbol{t}}) \cdot (\sum_\lambda \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}) = 0\,,$$

donc

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda \beta_\lambda = 0\,,$$

ce qui conduit, comme on l'a vu, à (103).

Ainsi donc la *condition nécessaire et suffisante pour que la courbe C soit asymptotique du 4-ième ordre est que*

$$\boxed{\gamma = 0 \quad \text{et} \quad \sum \beta_\lambda \alpha_\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \sum \beta_\lambda \alpha'_\lambda = 0}\,. \tag{104}$$

De cette manière au moyen de l'induction mathématique on arrive à la proposition générale suivante:

Proposition. *La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe C soit asymptotique d'ordre „p" (où $3 \leqslant p \leqslant n-1$) est que l'on ait les relations*

$$(105)\qquad \left| \begin{array}{l} \gamma = 0 \\ \displaystyle\sum_{\lambda=2}^{n-1} \beta_\lambda\, \alpha_\lambda^{(r)} = 0 \quad \text{pour } r = 0, \dots, p-3, \end{array} \right.$$

où $\alpha_\lambda^{(0)} = \alpha_\lambda$, et où $\alpha_\lambda^{(r)}$ est la dérivee d'ordre (r) de la fonction α_λ par rapport à l'arc s.

III. Lignes géodésiques. La déduction des conditions effectives pour qu'une ligne soit géodésique d'ordre arbitraire „p" n'est pas un problème facile. On rencontre des grandes difficultés, lorsqu'on veut exprimer les courbures $\varkappa_i$ en fonction des courbures hypersuperficielles. Nous nous bornerons à l'établir des conditions (simples) pour que la courbe C soit géodésique du deuxième ordre et qu'elle le soit du troisième ordre (déjà assez compliquées).

Si la courbe C est géodésique dans V_n, on aura (83) et à cause de (89) les conditions (84) doivent avoir lieu. Si $\varkappa_1 \neq 0$, la courbe C sera géodésique si le vecteur $\underset{n}{t}$ est situé dans le plan des vecteurs $\underset{1}{i}$ et $\underset{2}{i}$, c'est à dire dans le plan des vecteurs

$$\underset{1}{t} \quad \text{et} \quad D\underset{1}{t} = \sum \alpha_\lambda \underset{\lambda}{t} + \gamma \underset{n}{t}.$$

Cela signifie qu'il existe deux nombres ϱ, σ ayant la propriété

$$(106)\qquad |\varrho| + |\sigma| > 0$$

et tels que

$$(107)\qquad \underset{n}{t} = \varrho \underset{1}{t} + \sigma \{ \sum \alpha_\lambda \underset{\lambda}{t} + \gamma \underset{n}{t} \}.$$

A cause de l'indépendance des vecteurs $\underset{j}{t}$ on tire de (107)

$$(108)\qquad \varrho = 0, \quad \sigma \alpha_\lambda = 0, \quad \sigma\gamma = 1.$$

L'inégalité (106) et $\varrho = 0$ donne $\sigma \neq 0$, ce qui conduit à

$$(109)\qquad \boxed{\alpha_\lambda = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda = 2, \dots, n-1}$$

et à ce que $\gamma = \frac{1}{\sigma} \neq 0$. Réunissant les eventualités on arrive à la

Proposition. *La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe C soit géodésique sur V_{n-1} est que les relations* (109) *soient remplies.*

Cherchons encore la condition pour que la courbe soit géodésique d'ordre 3. Supposons que $\underset{n}{\boldsymbol{t}}$ ne soit pas dans le plan des vecteurs $(\underset{1}{\boldsymbol{i}}, \underset{2}{\boldsymbol{i}})$ mais que $\underset{n}{\boldsymbol{t}}$ soit situé dans l'espace des vecteurs $(\underset{1}{\boldsymbol{i}}, \underset{2}{\boldsymbol{i}}, \underset{3}{\boldsymbol{i}})$. On aura de la définition même

$$\left| \begin{array}{l} \underset{2}{\boldsymbol{i}} = \frac{1}{\varkappa_1} \cdot D\underset{1}{\boldsymbol{t}} \\ \underset{3}{\boldsymbol{i}} = \frac{1}{\varkappa_2} \{\varkappa_1 \underset{1}{\boldsymbol{t}} + D\underset{2}{\boldsymbol{i}}\}. \end{array} \right.$$

Ces formules, en tenant compte de (60) donnent

$$\underset{2}{\boldsymbol{i}} = \frac{1}{\varkappa_1}\{\sum \alpha_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \gamma \underset{n}{\boldsymbol{t}}\};$$

$$D\underset{2}{\boldsymbol{i}} = \frac{1}{\varkappa_1}\{\sum \alpha'_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \alpha_\lambda D\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \gamma' \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \gamma D\underset{n}{\boldsymbol{t}}\} - \frac{\varkappa'_1}{\varkappa_1^2}\{\sum \alpha_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \gamma \underset{n}{\boldsymbol{t}}\} =$$
$$= \frac{\varkappa_1\{\sum \alpha'_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \alpha_\lambda(-\alpha_\lambda \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \beta_\lambda \underset{n}{\boldsymbol{t}}) + \gamma' \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \gamma(-\gamma \underset{1}{\boldsymbol{t}} - \sum \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}})\} - \varkappa'_1(\sum \alpha_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \gamma \underset{n}{\boldsymbol{t}})}{\varkappa_1^2}.$$

De là

$$\varkappa_1 \underset{1}{\boldsymbol{t}} + D\underset{2}{\boldsymbol{i}} = \frac{\varkappa_1(\sum \alpha_\lambda \beta_\lambda + \gamma') - \gamma \varkappa'_1}{\varkappa_1^2} \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \frac{\sum_\lambda \{\varkappa_1(\alpha'_\lambda - \gamma\beta_\lambda) - \varkappa'_1 \alpha_\lambda\} \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}}{\varkappa_1^2} = \varkappa_2 \cdot \underset{3}{\boldsymbol{i}}, \tag{110}$$

d'où

$$\underset{3}{\boldsymbol{i}} = \frac{\{(\sum \alpha_\lambda \beta_\lambda + \gamma')\varkappa_1 - \gamma \varkappa'_1\} \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \sum_\lambda \{\varkappa_1(\alpha'_\lambda - \gamma\beta_\lambda) - \varkappa'_1 \alpha_\lambda\} \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}}{\varkappa_1^2 \varkappa_2}.$$

Puisque $\underset{n}{\boldsymbol{t}}$ ne doit pas être situé dans le plan $(\underset{1}{\boldsymbol{i}}, \underset{2}{\boldsymbol{i}})$ mais dans l'espace $(\underset{1}{\boldsymbol{i}}, \underset{2}{\boldsymbol{i}}, \underset{3}{\boldsymbol{i}})$, il y aura trois nombres ϱ, σ, τ tels que

$$\tau \neq 0$$

et tels que

$$\underset{n}{\boldsymbol{t}} = \varrho \underset{1}{\boldsymbol{i}} + \sigma \underset{2}{\boldsymbol{i}} + \tau \underset{3}{\boldsymbol{i}} = \varrho \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \frac{\sigma}{\varkappa_1}\{\gamma \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \sum \alpha_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}\} +$$

$$+ \frac{\tau}{\varkappa_1^2 \varkappa_2}\{[(\sum \alpha_\lambda \beta_\lambda + \gamma')\varkappa_1 - \gamma \varkappa_1'] \underset{n}{\boldsymbol{t}} + \sum_\lambda [\varkappa_1(\alpha_\lambda' - \gamma\beta_\lambda) - \varkappa_1' \alpha_\lambda] \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}\}.$$

On obtient de là en prenant en considération l'indépendance des vecteurs $\underset{j}{\boldsymbol{t}}$:

$$\varrho = 0, \quad 1 = \frac{\sigma\gamma}{\varkappa_1} + \frac{\tau}{\varkappa_1^2 \varkappa_2}\{(\sum \alpha_\lambda \beta_\lambda + \gamma')\varkappa_1 - \gamma\varkappa_1'\},$$

$$0 = \frac{\sigma \alpha_\lambda}{\varkappa_1} + \frac{\tau}{\varkappa_1^2 \varkappa_2}\{\varkappa_1(\alpha_\lambda' - \gamma\beta_\lambda) - \varkappa_1' \alpha_\lambda\}. \tag{111}$$

Puisque $\tau \neq 0$ et $n \geqslant 4$ (pour $n = 3$ il ne peut être question de la géodésité d'ordre 3), il résulte de la troisième relation (111) que la matrice

$$\| \alpha_\lambda, \varkappa_1(\alpha_\lambda' - \gamma\beta_\lambda) - \varkappa_1' \alpha_\lambda \| \qquad (\lambda = 2, \ldots, n-1) \tag{112}$$

doit avoir un rang inférieur à 2. Puisque $\sum \alpha_\lambda^2 > 0$ (si la courbe C n'est pas géodésique du deuxième ordre) la matrice (112) doit être du rang 1, c'est à dire que *la matrice*

$$\| \alpha_\lambda' - \gamma\beta_\lambda, \alpha_\lambda \| \qquad (\lambda = 2, \ldots, n-1) \tag{113}$$

doit être du rang 1.

La deuxième des relations (111) ne donne plus aucune condition pour α, β, γ et ne permet que déterminer les coefficients σ, τ. Les conditions de géodésité d'ordre supérieur au troisième ne s'expriment pas si simplement. Il est évident que de la condition (109) il s'ensuit automatiquement que la matrice (113) est du rang inférieur à 2.

Remarquons que dans les formules (108) aussi bien que dans celles de (111) $\varrho = 0$, ce qui signifie que dans le premier cas

le vecteur $\underset{n}{\boldsymbol{t}}$ est tout simplement linéairement dépendant de $\underset{2}{\boldsymbol{i}}$ et dans le second — que le vecteur est situé dans le plan des vecteurs $(\underset{2}{\boldsymbol{i}}, \underset{3}{\boldsymbol{i}})$. Ce fait peut être généralisé en modifiant eventuellement la définition des courbes géodésiques.

§ 6. Les courbures de la courbe et ses courbures hypersuperficielles

Nous avons remarqué dans le chapitre précédent que la déduction des formules effectives pour les courbure $\varkappa_j$ de la courbe C en fonction de ses courbures hypersuperficielles $\alpha_\lambda, \gamma, \beta_\lambda$ présente des grandes difficultés. La première courbure $\varkappa_1$ s'exprime au moyen d'une formule relativement très simple

$$\varkappa_1 = \sqrt{\sum \alpha_\lambda^2 + \gamma^2}. \tag{114}$$

Déjà la formule pour la deuxième courbure est assez compliquée. De la formule (110) on obtient

$$\varkappa_2 = \frac{\sqrt{\{\varkappa_1(\sum \alpha_\lambda \beta_\lambda + \gamma') - \gamma\varkappa_1'\}^2 + \sum_\lambda \{\varkappa_1(\alpha_\lambda' - \gamma\beta_\lambda) - \alpha_\lambda \varkappa_1'\}^2}}{\varkappa_1^2}. \tag{115}$$

La formule pour la courbure $\varkappa_3$ est très compliquée et il est quasi-impossible d'écrire la formule effective générale pour la courbure $\varkappa_j$. Nous nous bornerons d'en donner une idée en établissant une formule de récurrence de laquelle nous allons tirer les conclusions générales sur la forme de la fonction à l'aide de laquelle cette courbure $\varkappa_j$ est exprimée au moyen des courbures hypersuperficielles et des ses dérivées. Supposons, notamment, que l'on ait calculé la courbure $\varkappa_p$ et qu'elle s'exprime comme suit:

$$\varkappa_p = f(\alpha_\lambda, \alpha_\lambda', \ldots, \alpha_\lambda^{(p-1)};\ \gamma, \gamma', \ldots, \gamma^{(p-1)};\ \beta_\lambda, \beta_\lambda', \ldots, \beta_\lambda^{(p-2)}) \tag{116}$$

où f est une *fonction algébrique* des arguments qui y figurent. Pour calculer la courbure suivante $\varkappa_{p+1}$ on partira de l'équation de Frenet

$$D\underset{p+1}{\boldsymbol{i}} = -\varkappa_p \cdot \underset{p}{\boldsymbol{i}} + \varkappa_{p+1} \cdot \underset{p+2}{\boldsymbol{i}}, \tag{117}$$

de laquelle on a

$$\varkappa_{p+1} \cdot \underset{p+2}{i} = \varkappa_p \cdot \underset{p}{i} + D\underset{p+1}{i}.$$

On voit aussi que l'on a (les vecteurs $\underset{k}{i}$ étant les vecteurs-unités)

$$\varkappa_{p+1} = \sqrt{\varkappa_p^2 + |D\underset{p+1}{i}|^2}. \tag{118}$$

Pour nous orienter au sujet du module du vecteur $D\underset{p+1}{i}$, remarquons que:

$$\underset{2}{i} = \frac{1}{\varkappa_1} D\underset{1}{i} = \frac{1}{\varkappa_1} D\underset{1}{t} = \frac{1}{\varkappa_1} (\sum a_\lambda \underset{\lambda}{t} + \gamma \underset{n}{t}).$$

Le module de $D\underset{2}{i}$ s'exprime donc au moyen de $a_\lambda, a'_\lambda, \gamma, \gamma', \beta_\lambda$. Supposons que $D\underset{p}{i}$ s'exprime algébriquement à l'aide de

$$a_\lambda, a'_\lambda, \ldots, a_\lambda^{(p-1)}; \; \gamma, \gamma', \ldots, \gamma^{(p-1)}; \; \beta_\lambda, \beta'_\lambda, \ldots, \beta_\lambda^{(p-2)}. \tag{119}$$

En même temps, puisque

$$\underset{p+1}{i} = \frac{\varkappa_{p-1} \cdot \underset{p-1}{i} + D\underset{p}{i}}{\varkappa_p}$$

on constate en vertu des suppositions (116) et (118) que $\varkappa_{p+1}$ sera une fonction algébrique des éléments

$$a_\lambda, a'_\lambda, \ldots, a_\lambda^{(p)}; \; \gamma, \gamma', \ldots, \gamma^{(p)}; \; \beta_\lambda, \beta'_\lambda, \ldots, \beta_\lambda^{(p-1)}.$$

L'induction mathématique achève ainsi notre conclusion.

§ 7. Les *B*-courbures de la courbe située sur l'hypersurface V_{n-1}

Pour les courbes situés dans un sous-espace X_p plongé dans l'espace L_n (à connexion linéaire) où $p < n$ j'ai introduit [7]), en imitant un raisonnement de Hlavatý, certains invariants liés d'une manière intrinsèque au fait que l'on traite la courbe comme étant située dans X_p et non dans L_n (quoiqu'elle soit indirectement dans L_n). Je continuerai à appeler dans la suite

[7]) Dans le travail cité plus haut.

ces invariants „*les B-courbures*". Je vais rappeler ces définitions dans le cas où $L_n = V_n$ et quand $p = n-1$ et $X_p = V_{n-1}$. Il est évident que dans le cas spécial au lieu d'un arc affin figurera l'arc métrique s.

Désignons par $\boldsymbol{B}$ le champ des $(n-1)$-vecteurs simples (contrevariants) défini le long de la courbe C située sur V_{n-1}. Nous désignerons aussi, comme dans les chapitres précédents, par D le symbole de la différentiation covariante (par rapport à l'arc s) des grandeurs quelquonques et nous poserons

$$(120) \qquad \left| \begin{array}{l} \underset{1}{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} \\ \underset{i+1}{\boldsymbol{B}} = D\underset{i}{\boldsymbol{B}} \end{array} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Nous obtiendrons ainsi une suite de $(n-1)$-vecteurs

$$\underset{1}{\boldsymbol{B}}, \underset{2}{\boldsymbol{B}}, \ldots;$$

soit m un entier déterminé univoquement par la condition que les $(n-1)$-vecteurs:

$$(121) \qquad \underset{1}{\boldsymbol{B}}, \underset{2}{\boldsymbol{B}}, \ldots, \underset{m}{\boldsymbol{B}}$$

soient linéairement indépendants entre eux, tandis que déjà le $(n-1)$-vecteur

$$(122) \qquad \underset{m+1}{\boldsymbol{B}} = D\underset{m}{\boldsymbol{B}}$$

est linéairement dépendant des $(n-1)$-vecteurs (121).

On peut facilement montrer que si l'on prend un autre $(n-1)$-vecteur $\overline{\boldsymbol{B}}$ situé dans E_{n-1} et qui ne diffère, par conséquent, que par un coefficient de proportionnalité de $\boldsymbol{B}$ et si l'on définit d'une manière analogue le $\underset{i}{\overline{\boldsymbol{B}}}$, le nombre $\overline{m}$ obtenu par la suite $\underset{i}{\overline{\boldsymbol{B}}}$ sera identique à m. En prenant comme $\boldsymbol{B}$ un $(n-1)$-vecteur arbitraire à priori ($\boldsymbol{B} \neq 0$) et situé dans E_{n-1} nous poserons

$$(123) \qquad \begin{array}{l} \underset{1}{\boldsymbol{B}} = \sigma \cdot \boldsymbol{B} \\ \underset{i+1}{\boldsymbol{B}} = D\underset{i}{\boldsymbol{B}} \end{array} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Puisque le $(n-1)$-vecteur (122) doit être linéairement dépendant des vecteurs (121), on aura

$$D\underset{m}{B} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot \underset{j}{B}. \tag{124}$$

Le nombre m remplit dans le cas général ($V_p \subset V_n$) les inégalités

$$1 \leqslant m \leqslant p(n-p)+1. \tag{125}$$

Dans notre cas où $p = n-1$, on aura

$$1 \leqslant m \leqslant n. \tag{126}$$

Le facteur σ sera déterminé par la condition

$$\mu_m = 0. \tag{127}$$

Nous allons montrer que cela est possible. Posons pour le faire

$$D^m B = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j \cdot D^j B \tag{128}$$

$$(D^0 B = B,\ \ D^1 B = DB,\ \ D^{k+1} = D(D^k)).$$

On aura ensuite

$$\underset{2}{B} = D(\sigma B) = \sigma' \cdot B + \sigma DB$$

$$\underset{3}{B} = D\underset{2}{B} = D(\sigma' \cdot B + \sigma DB) = \sigma'' \cdot B + 2\sigma' \cdot DB + \sigma D\ B$$

et l'on montre par induction que l'on a en général

$$\underset{j+1}{B} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \sigma^{(j-k)} \cdot D^k B \qquad (\sigma^{(0)} = \sigma). \tag{129}$$

En particulier pour $j = m$

$$\underset{m+1}{B} = D\underset{m}{B} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sigma^{(m-k)} \cdot D^k B. \tag{130}$$

On peut éliminer successivement les $D^k B$ des équations (129) et les exprimer au moyen de $\underset{j}{B}$ $(j \leqslant k+1)$. On a en effet:

$$D^0\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}=\frac{1}{\sigma}\cdot\underset{1}{\boldsymbol{B}},\qquad \text{(le facteur } \sigma \text{ est évidemment différent de zéro)}$$

$$D\boldsymbol{B}=\frac{1}{\sigma}\left(\underset{2}{\boldsymbol{B}}-\sigma'\cdot\boldsymbol{B}\right)=\frac{1}{\sigma}\left(\underset{2}{\boldsymbol{B}}-\frac{\sigma'}{\sigma}\underset{1}{\boldsymbol{B}}\right),$$

$$D^2\boldsymbol{B}=\frac{1}{\sigma}\left(\underset{3}{\boldsymbol{B}}-\sigma''\boldsymbol{B}-2\sigma'D\boldsymbol{B}\right)=\frac{1}{\sigma}\left(\underset{3}{\boldsymbol{B}}-\frac{\sigma''}{\sigma}\underset{1}{\boldsymbol{B}}-\frac{2\sigma'}{\sigma}\underset{2}{\boldsymbol{B}}+\frac{2\sigma'^2}{\sigma^2}\underset{1}{\boldsymbol{B}}\right).$$

On peut montrer à l'aide de l'induction mathématique que l'on aura

$$D^j\boldsymbol{B}=\frac{1}{\sigma}\left\{\underset{j+1}{\boldsymbol{B}}-j\cdot\frac{\sigma'}{\sigma}\underset{j}{\boldsymbol{B}}\quad\begin{matrix}+\text{les termes renfermant}\\ \text{les } \underset{k}{\boldsymbol{B}} \text{ avec les indices } k<j\end{matrix}\right\}. \tag{131}$$

Si l'on substitue (131) dans (128), on obtient

$$\begin{aligned} D^m\boldsymbol{B}&=\lambda_{m-1}D^{m-1}\boldsymbol{B}+\lambda_{m-2}D^{m-2}\boldsymbol{B}+\dots\\ &=\lambda_{m-1}\cdot\frac{1}{\sigma}\left\{\underset{m}{\boldsymbol{B}}-(m-1)\cdot\frac{\sigma'}{\sigma}\underset{m-1}{\boldsymbol{B}}+\dots\right\}\\ &\qquad+\lambda_{m-2}\cdot\frac{1}{\sigma}\left\{\underset{m-1}{\boldsymbol{B}}-(m-2)\cdot\frac{\sigma'}{\sigma}\underset{m-2}{\boldsymbol{B}}+\dots\right\}+\dots\\ &\qquad\vdots\\ &\qquad+\lambda_0\cdot\frac{1}{\sigma}\underset{1}{\boldsymbol{B}}. \end{aligned}\tag{132}$$

La substitution de (132) et de (131) dans (130) donne:

$$\begin{aligned} D\underset{m}{\boldsymbol{B}}&=\sigma D^m\boldsymbol{B}+m\sigma'D^{m-1}\boldsymbol{B}+\dots\\ &=\lambda_{m-1}\left[\underset{m}{\boldsymbol{B}}-(m-1)\frac{\sigma'}{\sigma}\underset{m-1}{\boldsymbol{B}}+\dots\right]+\\ &\qquad+\lambda_{m-2}\left[\underset{m-1}{\boldsymbol{B}}-(m-2)\frac{\sigma'}{\sigma}\underset{m-2}{\boldsymbol{B}}+\dots\right]+\dots+\frac{\lambda_0}{\sigma}\underset{1}{\boldsymbol{B}}+\\ &\qquad+\frac{m\sigma'}{\sigma}\left[\underset{m}{\boldsymbol{B}}-(m-1)\frac{\sigma'}{\sigma}\underset{m-1}{\boldsymbol{B}}+\dots\right]+\binom{m}{2}\frac{\sigma''}{\sigma}\left[\underset{m-1}{\boldsymbol{B}}-\dots\right]+\dots \end{aligned}\tag{133}$$

On voit que l'expression $\underset{m}{\boldsymbol{B}}$ dans le second membre de (133) aura le coefficient

$$\mu_m=\lambda_{m-1}+\frac{m\sigma'}{\sigma}. \tag{134}$$

L'identité (127) devant être remplie, on doit avoir

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{\lambda_{m-1}}{m}, \tag{135}$$

d'où en intégrant on obtient

$$\sigma = C \cdot e^{-\frac{1}{m}\int \lambda_{m-1}\, ds}. \tag{136}$$

Nous voyons que le facteur cherché σ est déterminé par la formule (136) à un coefficient constant C près (le long de la courbe).

En choisissant le facteur σ dans la formule (123) d'après celle de (136) nous pourrons écrire au lieu de (124) une relation plus précise, notamment:

$$D\underset{m}{B} = \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \cdot \underset{j}{B}. \tag{137}$$

Définition 1. *Les coefficients scalaires dans la formule* (137):

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1} \tag{138}$$

seront dits B-courbures de la courbe C sur V_{n-1}.

Définition 2. Le nombre m sera dit *ordre de B-platitude de la courbe C*.

Demandons nous comment varient les courbures μ_j si l'on multiplie le facteur σ par une constante C. On aura dans ce cas:

$$\overline{\underset{1}{B}} = C\underset{1}{B}, \quad \overline{\underset{2}{B}} = D\overline{\underset{1}{B}} = D(C\underset{1}{B}) = CD\underset{1}{B} = C\underset{1}{B}.$$

On aura de même d'une manière analogue

$$\overline{\underset{j}{B}} = C\underset{j}{B} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{139}$$

Si l'on pose donc

$$D\overline{\underset{m}{B}} = \sum_{j=1}^{m-1} \bar{\mu}_j \cdot \overline{\underset{j}{B}},$$

on aura, à cause de (139) et de ce que $D\overline{B} = CDB$:

$$\bar{\mu}_j = \mu_j \qquad (j = 1, \ldots, m-1), \tag{140}$$

c'est à dire que les B-courbures sont des invariants absolus relativement à la constante multiplicative C dans la formule (136).

Déterminons le facteur σ en prenant comme point de départ pour le $(n-1)$-vecteur $\boldsymbol{B}$ le $(n-1)$-vecteur formé des vecteurs $\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}$:

$$\boldsymbol{B} = [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}]. \tag{141}$$

Nous rappelons la règle de la différentiation covariante d'un tel $(n-1)$-vecteur qui s'exprime par la formule

$$D\boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{n-1} [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{j-1}{\boldsymbol{t}}, D\underset{j}{\boldsymbol{t}}, \underset{j+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}]. \tag{142}$$

Pour calculer le second membre de la formule (142) nous désignerons pour abréger par $\underset{j}{\boldsymbol{b}}$ le $(n-1)$-vecteur suivant

$$\underset{j}{\boldsymbol{b}} = [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{j-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{j+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{n}{\boldsymbol{t}}], \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{143}$$

On obtiendra en appliquant les formules (60)

$$\left|\begin{aligned}
&[D\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}] = [\textstyle\sum a_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \gamma \underset{n}{\boldsymbol{t}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}] = \\
&= \gamma[\underset{n}{\boldsymbol{t}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}] = (-1)^{n-2} \cdot \gamma [\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] = (-1)^n \cdot \gamma \cdot \underset{1}{\boldsymbol{b}}. \\
&[\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, D\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}] = [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, -a_\lambda \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \beta_\lambda \underset{n}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}] = \\
&= \beta_\lambda [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{n}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}} \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}] = (-1)^{n-1-(\lambda+1)+1} \cdot \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}} = \\
&\quad = (-1)^{n-\lambda-1} \beta_\lambda \cdot \boldsymbol{b}_\lambda.
\end{aligned}\right. \tag{144}$$

On a donc

$$D\boldsymbol{B} = (-1)^n \cdot \gamma \underset{1}{\boldsymbol{b}} + \sum_\lambda (-1)^{n-\lambda-1} \beta_\lambda \cdot \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}}. \tag{145}$$

On déterminera pareillement la dérivée covariante pour les autres $\underset{j}{\boldsymbol{b}}$ (car $\boldsymbol{B} = \underset{n}{\boldsymbol{b}}$):

$$\left|\begin{aligned}
&D\underset{1}{\boldsymbol{b}} = D[\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] = \sum_\lambda [\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, D\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] + \\
&+ [\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}, D\underset{n}{\boldsymbol{t}}] = \sum_\lambda [\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, -a_\lambda \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \beta_\lambda \underset{n}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] + \\
&+ [\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}, -\gamma \underset{1}{\boldsymbol{t}} - \sum_\lambda \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}] = -\sum_\lambda a_\lambda [\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{1}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] - \\
&- \gamma [\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{1}{\boldsymbol{t}}] = \sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} a_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}} + (-1)^{n-1} \gamma \underset{n}{\boldsymbol{b}}.
\end{aligned}\right. \tag{146}$$

Finalement

$$
(147)\quad \left|\begin{aligned}
D\underset{\lambda}{\boldsymbol{b}} &= [D\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] + \sum_{\mu\neq\lambda} [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, D\underset{\mu}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] + \\
&+ [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, D\underset{n}{\boldsymbol{t}}] = [\sum_{\mu} \alpha_\mu \underset{\mu}{\boldsymbol{t}} + \gamma \underset{n}{\boldsymbol{t}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] + \\
&+ [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}, -\sum_{\mu} \beta_\mu \underset{\mu}{\boldsymbol{t}} - \gamma \underset{1}{\boldsymbol{t}}] + \\
&+ \sum_{\mu<\lambda} [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\mu-1}{\boldsymbol{t}}, -\alpha_\mu \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \beta_\mu \underset{n}{\boldsymbol{t}}, \underset{\mu+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] + \\
&+ \sum_{\mu>\lambda} [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\mu-1}{\boldsymbol{t}}, -\alpha_\mu \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \beta_\mu \underset{n}{\boldsymbol{t}}, \underset{\mu+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] = \\
&= \alpha_\lambda [\underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{t}}] - \beta_\lambda [\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{\lambda-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda+1}{\boldsymbol{t}}, \ldots, \underset{n-1}{\boldsymbol{t}}, \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}}] = \\
&\qquad = (-1)^{\lambda} \alpha_\lambda \underset{1}{\boldsymbol{b}} + (-1)^{n-\lambda} \beta_\lambda \underset{n}{\boldsymbol{b}}.
\end{aligned}\right.
$$

Nous pouvons réunir les formules (145), (146), (147) et leur donner la forme suivante

$$
(148)\quad \left|\begin{aligned}
D\underset{1}{\boldsymbol{b}} &= \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda-1} \alpha_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}} + (-1)^{n-1} \gamma \underset{n}{\boldsymbol{b}} \\
D\underset{\mu}{\boldsymbol{b}} &= (-1)^{\mu} \alpha_\mu \underset{1}{\boldsymbol{b}} + (-1)^{n-\mu} \beta_\mu \underset{n}{\boldsymbol{b}} \\
D\underset{n}{\boldsymbol{b}} &= (-1)^{n} \gamma \underset{1}{\boldsymbol{b}} + \sum_{\lambda} (-1)^{n-\lambda-1} \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}}.
\end{aligned}\right.
$$

Nous constatons que les formules (148) ressemblent beaucoup aux formules généralisées de Bonnet-Kowalewski (60). Il suffira d'y remplacer $\underset{j}{\boldsymbol{t}}$ par $(-1)^{j} \cdot \underset{j}{\boldsymbol{b}}$ pour obtenir les formules (148).

Cette dualité entre les formules pour les vecteurs $\underset{j}{\boldsymbol{t}}$ et les $(n-1)$-vecteurs (créés à l'aide de ceux-ci) $\underset{j}{\boldsymbol{b}}$ était d'ailleurs à prévoir.

En partant des formules (148) nous pouvons calculer successivement les itérations $D^{j}\boldsymbol{B} = D^{j}\boldsymbol{b}$ et arriver à λ_{m-1}. Après avoir trouvé λ_{m-1} on calculera le coefficient cherché σ par la formule (136). Nous allons donner les calculs effectifs dans le cas particulier de $n=3$.

Dans ce cas les équations (60) se réduisent aux équations (1), les équations (148), par contre, aux équations:

$$
(149)\quad \left|\begin{aligned}
D\underset{1}{\boldsymbol{b}} &= -\alpha \underset{2}{\boldsymbol{b}} + \gamma \underset{3}{\boldsymbol{b}} \\
D\underset{2}{\boldsymbol{b}} &= \alpha \underset{1}{\boldsymbol{b}} - \beta \underset{3}{\boldsymbol{b}} \\
D\underset{3}{\boldsymbol{b}} &= -\gamma \underset{1}{\boldsymbol{b}} + \beta \underset{2}{\boldsymbol{b}}.
\end{aligned}\right.
$$

Le nombre m peut prendre, comme on le voit des inégalités (126), trois valeurs différentes: $m = 1, 2, 3$.

Supposons que l'ordre m de B-platitude de la courbe soit égal à 1

$$m = 1. \tag{150}$$

Dans ce cas

$$D\underset{3}{\boldsymbol{b}} = \lambda_0 \underset{3}{\boldsymbol{b}}.$$

En comparant

$$\lambda_0 \underset{3}{\boldsymbol{b}} = -\gamma \underset{1}{\boldsymbol{b}} + \beta \underset{2}{\boldsymbol{b}}$$

et en nous rappelant que les $(n-1)$-vecteurs $\underset{1}{\boldsymbol{b}}, \underset{2}{\boldsymbol{b}}, \underset{3}{\boldsymbol{b}}$, sont linéairement indépendants entre eux, nous obtenons de là

$$\lambda_0 \equiv 0, \ \gamma \equiv 0, \ \beta \equiv 0. \tag{151}$$

Dans ce cas, alors, $\lambda_0 \equiv 0$ et la formule (136) donne $\sigma \epsilon$ Const; on aura

$$\mu_1 \equiv 0, \tag{152}$$

ce qui veut dire que l'unique B-courbure de la courbe C est dans ce cas identiquement égale à zéro.

Supposons maintenant que

$$m = 2. \tag{153}$$

On aura, alors,

$$D^2 \underset{3}{\boldsymbol{b}} = \lambda_0 \underset{3}{\boldsymbol{b}} + \lambda_1 D \underset{3}{\boldsymbol{b}}, \tag{154}$$

mais:

$$\left\{ \begin{aligned} D^2 \underset{3}{\boldsymbol{b}} &= -\gamma' \underset{1}{\boldsymbol{b}} + \beta' \underset{2}{\boldsymbol{b}} - \gamma D \underset{1}{\boldsymbol{b}} + \beta D \underset{2}{\boldsymbol{b}} = \\ &= -\gamma' \underset{1}{\boldsymbol{b}} + \beta' \underset{2}{\boldsymbol{b}} + \alpha\gamma \underset{2}{\boldsymbol{b}} - \gamma^2 \underset{3}{\boldsymbol{b}} + \alpha\beta \underset{1}{\boldsymbol{b}} - \beta^2 \underset{3}{\boldsymbol{b}} \\ &= (\alpha\beta - \gamma') \underset{1}{\boldsymbol{b}} + (\beta' + \alpha\gamma) \underset{2}{\boldsymbol{b}} - (\beta^2 + \gamma^2) \underset{3}{\boldsymbol{b}}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part:

$$\lambda_0 \underset{3}{\boldsymbol{b}} + \lambda_1 D \underset{3}{\boldsymbol{b}} = \lambda_0 \underset{3}{\boldsymbol{b}} - \gamma \lambda_1 \underset{1}{\boldsymbol{b}} + \beta \lambda_1 \underset{2}{\boldsymbol{b}}.$$

De la comparaison avec (154) nous obtenons

$$\left|\begin{aligned} &\alpha\beta - \gamma' = -\gamma\lambda_1 \\ &\beta' + \alpha\gamma = \beta\lambda_1 \\ &-(\beta^2+\gamma^2) = \lambda_0 . \end{aligned}\right. \tag{155}$$

En éliminant λ_1 de deux premières équations (155) on arrive à ce que

$$\alpha(\beta^2+\gamma^2) + \gamma\beta' - \beta\gamma' = 0 . \tag{156}$$

Puisque $m=2$ (voir (151)), on a

$$\beta^2+\gamma^2 > 0 \tag{157}$$

et l'égalité (156) donne

$$\alpha = \frac{\beta\gamma' - \gamma\beta'}{\beta^2+\gamma^2} . \tag{158}$$

La première des équations (155) permet dans ce cas de calculer λ_1:

$$\lambda_1 = \frac{\beta\beta' + \gamma\gamma'}{\beta^2+\gamma^2} . \tag{159}$$

On a de là à cause de (136) (en posant $C=1$ ce qui est permis en vertu de ce que nous avons dit plus haut):

$$\sigma = e^{-\frac{1}{2}\int \lambda_1 ds} = e^{-\frac{1}{4} ln(\beta^2+\gamma^2)} = (\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{1}{4}} . \tag{160}$$

Calculons maintenant la courbure μ_1.

Posons

$$\underset{1}{\boldsymbol{B}} = \sigma \underset{3}{\boldsymbol{b}} .$$

En différentiant deux fois, nous aurons:

$$\begin{aligned} D^2 \underset{1}{\boldsymbol{B}} &= \sigma'' \underset{3}{\boldsymbol{b}} + 2\sigma'(-\gamma \underset{1}{\boldsymbol{b}} + \beta \underset{2}{\boldsymbol{b}}) + \\ &+ \sigma[-\gamma' \underset{1}{\boldsymbol{b}} + \beta' \underset{2}{\boldsymbol{b}} - \gamma(-\alpha \underset{2}{\boldsymbol{b}} + \gamma \underset{3}{\boldsymbol{b}}) + \beta(\alpha \underset{1}{\boldsymbol{b}} - \beta \underset{3}{\boldsymbol{b}})]. \end{aligned} \tag{161}$$

A cause de (137)

$$D^2 \underset{1}{\boldsymbol{B}} = \mu_1 \underset{1}{\boldsymbol{B}} = \mu_1 \sigma \underset{3}{\boldsymbol{b}} . \tag{162}$$

En comparant les coefficients de $\mathbf{b}_3$ dans (161) et (162) on obtient

$$\sigma'' - \sigma(\beta^2 + \gamma^2) = \mu_1 \sigma,$$

d'où

$$\mu_1 = \frac{\sigma''}{\sigma} - (\beta^2 + \gamma^2). \tag{163}$$

La substitution de la valeur (160) à la place de σ conduit à une formule assez compliquée pour la courbure μ_1:

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{\begin{array}{c}\beta^3\beta'' + \beta^2\gamma\gamma'' + \beta^2\gamma'^2 + \beta\gamma^2\beta'' + \gamma^3\gamma'' + \gamma^2\beta'^2 - \\ -\frac{3}{2}(\beta^2\beta'^2 + \gamma^2\gamma'^2) - 5\beta\gamma\beta'\gamma' + 2\beta^2 + 2\gamma^6 + 6\beta^4\gamma^2 + 6\beta^2\gamma^4\end{array}}{(\beta^2+\gamma^2)^2}. \tag{164}$$

Considérons enfin le troisième cas le plus général où

$$m = 3. \tag{165}$$

En différentiant encore une fois la relation (161) on aura

$$\left|\begin{array}{l} D^3\mathbf{B}_1 = \sigma'''\,\mathbf{b}_3 + 3\sigma''(-\gamma\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2) + 3\sigma'(-\gamma'\,\mathbf{b}_1 + \beta'\,\mathbf{b}_2 + \alpha\gamma\mathbf{b}_2 + \alpha\beta\mathbf{b}_1 \\ -\beta^2\mathbf{b}_3 - \gamma^2\mathbf{b}_3) + \sigma\{-\gamma''\,\mathbf{b}_1 + \beta''\,\mathbf{b}_2 + (\alpha'\gamma + \alpha\gamma')\,\mathbf{b}_2 - 2\gamma\gamma'\,\mathbf{b}_3 \\ +(\alpha'\beta + \alpha\beta')\,\mathbf{b}_1 - 2\beta\beta'\,\mathbf{b}_3 - \gamma'(-\alpha\mathbf{b}_2 + \gamma\mathbf{b}_3) + \beta'(\alpha\mathbf{b}_1 - \beta\mathbf{b}_3) \\ +\alpha\gamma(\alpha\mathbf{b}_1 - \beta\mathbf{b}_3) - \gamma^2(-\gamma\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2) + \alpha\beta(-\alpha\mathbf{b}_2 + \gamma\mathbf{b}_3) - \beta^2(-\gamma\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2)\}. \end{array}\right. \tag{166}$$

D'autre part, on doit avoir

$$\begin{aligned} D^3\mathbf{B}_1 = \mu_1\,\mathbf{B}_1 + \mu_2\,D\mathbf{B}_1 &= \mu_1\sigma\mathbf{b}_3 + \mu_2\{\sigma'\,\mathbf{b}_3 + \sigma(-\gamma\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2)\} \\ &= -\mu_2\sigma\gamma\mathbf{b}_1 + \mu_2\sigma\beta\mathbf{b}_2 + (\mu_1\sigma + \mu_2\sigma')\,\mathbf{b}_3. \end{aligned} \tag{167}$$

La comparaison des coefficients correspondants des $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ dans (166) et (167) conduit, si l'on pose

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \Omega \tag{168}$$

aux relations suivantes:

$$\left|\begin{array}{l} -\mu_2\sigma\gamma = -3\gamma\sigma'' + 3(\alpha\beta - \gamma')\,\sigma' + (2\alpha\beta' + \alpha'\beta - \gamma'' + \gamma\Omega)\,\sigma \\ \mu_2\sigma\beta = 3\beta\sigma'' + 3(\alpha\gamma + \beta')\,\sigma' + (2\alpha\gamma' + \alpha'\gamma + \beta'' - \beta\Omega)\,\sigma \\ \mu_1\sigma + \mu_2\sigma' = \sigma''' - 3(\beta^2 + \gamma^2)\,\sigma' - 3(\beta\beta' + \gamma\gamma')\,\sigma. \end{array}\right. \tag{169}$$

Puisque $m=3$, l'expression du premier membre de (156) est différente de zéro

$$M = \alpha(\beta^2+\gamma^2)+\gamma\beta'-\beta\gamma' \neq 0. \tag{170}$$

On éliminera σ'' de deux premières équations (169) en multipliant la première par β, la deuxième par γ et en les ajoutant membre à membre. On obtiendra

$$3M\sigma' + [2\alpha(\beta\beta'+\gamma\gamma')+\alpha'(\beta^2+\gamma^2)-\beta\gamma''+\beta''\gamma]\,\sigma = 0, \tag{171}$$

c'est à dire, comme il est facile de remarquer:

$$3M\sigma' + M'\sigma = 0, \tag{172}$$

d'où:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{1}{3}\,\frac{M'}{M}. \tag{173}$$

En intégrant effectivement l'équation (173) et en prenant la constante d'intégration égale à 1 on obtient:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}. \tag{174}$$

Après avoir calculé σ, on substitue la valeur dans la première équation (169) et on trouve d'abord la courbure μ_2. La substitution de μ_2 dans la troisième équation (169) donne la courbure μ_1. Les longueurs des formules effectives pour μ_1 et μ_2 nous empêchent de les reproduire ici. On voit en tout cas de (170), (174) et (169) que μ_2 sera une fonction algébrique dépendant des troisièmes dérivées de β et γ et de la deuxième dérivée de α. L'ordre de la courbure μ_1 par contre, sera supérieur d'une unité, c'est à dire qu'elle dépendra des quatrièmes dérivées de β et γ et de la troisième dérivée de α.

§ 8. Sur une relation entre l'ordre de platitute r et l'ordre de la B-platitude m

Récrivons les équations (60) et l'équation (148) en posant

$$\underset{j}{b}{}^{*} = (-1)^j \underset{j}{b}, \tag{181}$$

en mettant la troisième équation en première place et la première équation à la troisième place. On exprimera ainsi le fait que pour établir les équations de Bonnet-Kowalewski nous partons du champ vectoriel $\underset{1}{\boldsymbol{t}}$ et que pour arriver aux équations (148) on prend comme point de départ le champ des $(n-1)$-vecteurs $\underset{n}{\boldsymbol{b}}$. On aura alors

$$(182)\qquad \left|\begin{aligned} D\underset{1}{\boldsymbol{t}} &= \sum a_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} + \gamma \underset{n}{\boldsymbol{t}} \\ D\underset{\mu}{\boldsymbol{t}} &= -a_\mu \underset{1}{\boldsymbol{t}} + \beta_\mu \underset{n}{\boldsymbol{t}} \\ D\underset{n}{\boldsymbol{t}} &= -\gamma \underset{1}{\boldsymbol{t}} - \sum \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{t}} \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} D\underset{n}{\boldsymbol{b}^*} &= -\gamma \underset{1}{\boldsymbol{b}^*} - \sum \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}^*} \\ D\underset{\mu}{\boldsymbol{b}^*} &= \beta_\mu \underset{n}{\boldsymbol{b}^*} - a_\mu \underset{1}{\boldsymbol{b}^*} \\ D\underset{1}{\boldsymbol{b}^*} &= \sum a_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}^*} + \gamma \underset{n}{\boldsymbol{b}^*}. \end{aligned}\right.$$

On peut facilement déduire de ces équations les deux propositions suivantes:

Proposition I. *Si* $r=1$, *dans ce cas* $m \leqslant n-1$.

Proposition II. *Si* $m=1$, *dans ce cas* $r \leqslant n-1$.

Nous ne donnerons que la démonstration de la première de ces propositions. Celle de la seconde proposition est tout à fait analogue.

Soit donc $r=1$, c'est à dire

$$\gamma = 0 \quad \text{et} \quad a_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 2, \ldots, n-1).$$

Le second groupe d'équations (182) se réduit à

$$\left|\begin{aligned} D\underset{n}{\boldsymbol{b}^*} &= -\sum \beta_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}^*} \\ D\underset{\mu}{\boldsymbol{b}^*} &= \beta_\mu \cdot \underset{n}{\boldsymbol{b}^*}. \end{aligned}\right.$$

La troisième équation peut être omise.

En différentiant la première de ces dernières équations et en utilisant l'autre, on obtient successivement:

$$\begin{aligned} D^2 \underset{n}{\boldsymbol{b}^*} &= -\sum (\beta'_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}^*} + \beta^2_\lambda \underset{n}{\boldsymbol{b}^*}), \\ D^3 \underset{n}{\boldsymbol{b}^*} &= -\sum (\beta''_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}^*} + 3\beta_\lambda \beta'_\lambda \underset{n}{\boldsymbol{b}^*} - \beta^3_\lambda \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}^*}), \\ &= -\sum_\lambda [(\beta''_\lambda - \beta^3_\lambda) \underset{\lambda}{\boldsymbol{b}^*} + 3\beta_\lambda \beta'_\lambda \underset{n}{\boldsymbol{b}^*}]. \end{aligned}$$

Au moyen de la méthode d'induction on parvient à démontrer que

$$D^j \underset{n}{b^*} = \varrho_j \underset{n}{b^*} + \sum_{\lambda} \tau_{j\lambda} \underset{\lambda}{b^*},$$

d'où on voit que l'on aura

$$D^{n-1} \underset{n}{b^*} = \sum_{j=0}^{n-2} \omega_j D^j \underset{n}{b^*},$$

ce qui démontre notre proposition.

Dans le cas particulier des courbures hypersuperficielles constantes on a:

$$D^2 \underset{n}{b^*} = -\sum \beta_\lambda^2 \cdot \underset{n}{b^*},$$

c'est à dire que dans ce cas $m \leqslant 2$. On arrive ainsi aux deux propositions suivantes:

Proposition I*. *Si les courbures hypersuperficielles sont constantes et si $r = 1$, dans ce cas $m \leqslant 2$.*

Proposition II*. *Si les courbures hypersuperficielles sont constantes et $m = 1$, dans ce cas $r \leqslant 2$.*

§ 9. Quelques théorèmes sur les courbes situées sur l'hypersurface V_{n-1} plongée dans V_n

Proposons nous de généraliser trois propositions du 1 chapitre.

Supposons tout d'abord que la courbe C soit géodésique et une ligne de courbure. Dans ce cas, en vertu des formules (78) et (109), auront lieu les relations:

(183) $$\alpha_\lambda \equiv \beta_\lambda \equiv 0 \quad \text{pour} \quad \lambda = 2, \ldots, n-1.$$

Si l'on avait en même temps $\gamma \equiv 0$, on aurrait, à cause de (114) $\varkappa_1 = 0$ et la courbe C serait une géodésique dans l'espace V_n. Supposons que $\gamma \neq 0$. Dans ce cas $\varkappa_1 \neq 0$ et la formule (114) nous donne:

$$\varkappa_1 = \varepsilon\gamma \quad \text{où} \quad \varepsilon^2 = 1,$$

d'où $$\varkappa_1' = \varepsilon\gamma'.$$

La formule (115) donne

$$\varkappa_2 = \frac{\sqrt{(\varkappa_1 \gamma' - \gamma \varkappa_1')^2}}{\varkappa_1^2} = \frac{\sqrt{(\varepsilon\gamma\gamma' - \varepsilon\gamma\gamma')^2}}{\gamma^2} = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer la

Proposition 1. *Si la courbe C est en même temps une ligne de courbure et une géodésique, cette courbe doit être plane* (*son ordre de platitude* $r \leqslant 2$) [8]).

Proposition 2. *Une ligne géodésique plane qui n'est pas droite (c.-à-d. n'est pas géodésique relativement à l'espace entourant) est une ligne de courbure.*

Démonstration. Pour une telle ligne géodésique on a

$$\varkappa_1 = \varepsilon\gamma, \quad \varkappa_1' = \varepsilon\gamma' \qquad (\gamma \neq 0) \tag{184}$$

et

$$\varkappa_2 = \frac{\gamma^2 \sqrt{\sum \beta_\lambda^2}}{\gamma^2} = \sqrt{\sum \beta_\lambda^2}, \tag{185}$$

donc la relation $\varkappa_2 = 0$ entraîne les relations $\beta_\lambda = 0$ d'ou il résulte que cette ligne est une ligne de courbure.

Supposons maintenant que la courbe C soit une ligne de courbure et en même temps une ligne asymptotique (du 2-ième ordre). On aurait en vertu de (78) et (87)

$$\beta_\lambda = 0 \;\text{ pour }\; \lambda = 2, \ldots, n-1 \;\text{ et }\; \gamma = 0. \tag{186}$$

Supposons encore que

$$\sum \alpha_\lambda^2 > 0.$$

Dans ce cas

$$\varkappa_1 = \sqrt{\sum \alpha_\lambda^2}$$

et

$$\varkappa_2 = \frac{\sqrt{\sum\limits_\lambda [\varkappa_1 \alpha_\lambda' - \varkappa_1' \alpha_\lambda]^2}}{\sum \alpha_\lambda^2} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{\lambda<\mu} \begin{vmatrix} \alpha_\lambda' & \alpha_\mu' \\ \alpha_\lambda & \alpha_\mu \end{vmatrix}^2}}{\sum \alpha_\lambda^2}. \tag{187}$$

---

[8]) Ce théorème pour $n = 3$ est dû à Bertrand.

On voit de la formule (187) que dans le cas général $(n \geqslant 4)$ $\varkappa_2 \neq 0$ et que *la proposition* 2 *du* § 1 *ne peut être etendue au cas général.*

La courbe C, en admettant qu'elle soit une ligne géodésique et asymptotique, ne sera plane $(r=2)$ que si l'on a les relations:

$$(188) \qquad a'_\lambda = C a_\lambda \text{ pour } \lambda = 2, \dots, n-1.$$

Des relations (188) nous obtenons:

$$(189) \qquad a_\lambda = C_\lambda e^{Cs} \text{ où } C_\lambda \text{ sont des constantes.}$$

Nous constatons que dans le cas particulier où les a_λ sont constantes, les relations (188) sont vérifiées. Nous avons alors la

Proposition 3. *Si la courbe C est une ligne de courbure et en même temps une ligne asymptotique et si ses courbures hypersuperficielles sont constantes, la courbe C sera plane.*

Remarquons maintenant que des suppositions (183) résultent les relations (104). De là, en nous appuyant sur la proposition de la page 124 nous pouvons énoncer la

Proposition 4. *Si la courbe C est une ligne de courbure et asymptotique du deuxième ordre, elle sera une ligne asymptotique de chaque ordre.*

Admettons maintenant que la courbe C soit géodésique et asymptotique du deuxième ordre. On aura alors les relations

$$(190) \qquad \gamma \equiv 0 \text{ et } a_\lambda \equiv 0 \text{ pour } \lambda = 2, \dots, n-1.$$

Nous avons dans ce cas, à cause de (114), $\varkappa_1 \equiv 0$ et la

Proposition 5. *Si la courbe C est asymptotique (d'ordre 2) et géodésique (d'ordre 2), elle sera une ligne droite (géodésique dans l'espace entourant V_n).*

Nous voyons donc que la proposition 3 du § 1 se généralise au cas des dimensions quelconques.

Par contre, si nous supposons que la courbe soit asymptotique d'ordre 2 $(\gamma \equiv 0)$ et géodésique du troisième ordre, la matrice (113) c'est à dire dans notre cas la matrice

$$(191) \qquad \| a'_\lambda, a_\lambda \|$$

est du rang 1. Nous avons donc

$$a'_\lambda = C \cdot a_\lambda$$

d'où nous obtenons que

$$(192) \qquad a_\lambda = C_\lambda e^{Cs} \quad (C, C_\lambda \text{ constantes}).$$

Nous voyons en particulier ($C = 0$) que *si les courbures a_λ sont constantes, la courbe sera géodésique du troisième ordre.*

Le théorème 3 du § 1 est dû à Enneper. D'après l'article de M. Lilienthal inséré dans Enzyklopedie der mathematischen Wissenschaften Enneper aurait démontré un théorème affirmant que toute courbe asymptotique plane est une droite. L'exemple d'une ligne asymptotique qui est en même temps une ligne de courbure montre que cet enoncé n'est pas exact. Une telle ligne est plane, en vertu du théorème du § 1, sans être forcément droite [9]). On a sur ce sujet le suivant

Théorème 5*. *Dans le cas $n = 3$ toute courbe asymptotique plane qui n'est pas en même temps une ligne de courbure est forcément une ligne droite.*

On a, en effet, pour une ligne asymptotique $\gamma \equiv 0$, c.-à.-d.

$$\varkappa_1 = \varepsilon a.$$

Supposons, par l'impossible, que l'on ait $a \neq 0$. On a alors

$$\varkappa_2 = \frac{\sqrt{a^4 \beta^2}}{a^2} = \eta\beta \quad \text{où} \quad \eta^2 = 1.$$

Comme $\varkappa_2 = 0$, donc $\beta = 0$ et par suite C est une ligne de courbure ce qui est contraire à notre hypothèse.

Le théorème 5* n'est pas susceptible d'une généralisation au cas $n > 3$.

Examinons maintenant si la courbe C peut être à la fois géodésique du troisième ordre (et pas du deuxième ordre) et asymptotique du troisième ordre. Si elle est géodésique du troisième ordre (et pas du deuxième ordre), alors $\varkappa_1 \neq 0$ et $\varkappa_2 \neq 0$

---

[9]) Un plan perpendiculaire à l'axe d'un tore de révolution et tangent à ce tore, touche le tore le long d'une circonférence qui est évidemment à la fois une ligne asymptotique et une ligne de courbure.

et les relations (111) ont lieu. Mais du fait que C est asymptotique du troisième ordre résultent les relations (95) et la deuxième des équations (111) conduit à une contradiction $1=0$. Nous pouvons donc énoncer la

Proposition 6. *Si la courbe C n'est pas géodésique au sens ordinaire (d'ordre 2), elle ne peut pas être géodésique et asymptotique du troisième ordre simultanément.*

Examinons maintenant l'ordre m de la B — platitude des courbes qui remplissent deux de trois propriétés (être une ligne de courbure, ou asymptotique ou géodésique).

Nous allons reprendre pour cela les équations (148).

Supposons que la courbe C soit une ligne de courbure et géodésique. Dans ce cas $\beta_\lambda \equiv \alpha_\lambda \equiv 0$ et l'équations (148) prendront la forme suivante:

$$\left|\begin{array}{l} D\underset{1}{\boldsymbol{b}} = (-1)^{n-1}\gamma\underset{n}{\boldsymbol{b}} \\ D\underset{n}{\boldsymbol{b}} = (-1)^{n}\gamma\underset{1}{\boldsymbol{b}}, \end{array}\right.$$

d'où (pour $\gamma \neq 0$) nous avons:

$$D^2\underset{1}{\boldsymbol{b}} = (-1)^{n-1}\{\gamma'\underset{n}{\boldsymbol{b}} + (-1)^n\gamma^2\underset{1}{\boldsymbol{b}}\} = \frac{\gamma'}{\gamma}D\underset{1}{\boldsymbol{b}} - \gamma^2\underset{1}{\boldsymbol{b}},$$

ce qui montre que l'ordre de la B-platitude de la courbe $m=2$. Nous avons ainsi démontré la

Proposition 7. *Si la courbe C est une ligne de courbure et géodésique, elle est B-plane.*

Supposons maintenant que la courbe C soit une ligne de courbure et asymptotique du deuxième ordre. Dans ce cas

$$\beta_\lambda \equiv 0 \quad \text{et} \quad \gamma \equiv 0.$$

La première équation du second groupe d'équations (182) donne

$$D\underset{n}{\boldsymbol{b}}^* \equiv 0$$

c'est à dire $m=1$ et l'hyperplan E_{n-1} est stationaire le long de C. Il en résulte la

Proposition 8. *Si la courbe C est une ligne de courbure et en même temps une ligne asymptotique, l'ordre de la B-platitude* $m=1$.

Supposons enfin que C soit une ligne géodésique et une ligne asymptotique, c'est à dire que l'on ait

$$\alpha_\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \gamma = 0.$$

Nous aurons dans ce cas, comme on le sait, $r=1$ et en vertu de la proposition I du chapitre précédent

Proposition 9. *Si la courbe est une ligne géodésique et asymptotique du deuxième ordre, sa B-platitude m est au plus égale à $n-1$.*

Si en particulier la matrice (191) est dans ces conditions du *rang* 1 alors la courbe, comme on l'a vu, sera plane. On peut montrer pareillement que *si la courbe est une ligne asymptotique et géodésique et si ses courbures β_λ satisfont à la condition que la matrice*

$$\|\beta'_\lambda, \beta_\lambda\|$$

est du rang 1, *la courbe possède l'ordre de B-platitude au plus égal à* 2.

§ 10. Cas particulier de $n=3$

Dans l'espace V_3 les formules (1) ont lieu. Dans ce cas les formules (114) et (115) se simplifient. Au lieu de (114) on a notamment

$$\varkappa_1 = \sqrt{\alpha^2+\gamma^2}. \tag{193}$$

Dans ce cas

$$\varkappa'_1 = \frac{\alpha\alpha'+\gamma\gamma'}{\varkappa_1} \quad \text{si} \quad \varkappa_1 \neq 0. \tag{194}$$

La substitution de cette valeur dans la formule (115) qui se réduit à

$$\varkappa_2 = \frac{\sqrt{\{\varkappa_1(\alpha\beta+\gamma')-\gamma\varkappa'_1\}^2+\{\varkappa_1(\alpha'-\beta\gamma)-\alpha\varkappa'_1\}^2}}{\varkappa_1^2} \tag{195}$$

conduit tour à tour aux transformations

$$\varkappa_2 = \frac{\sqrt{\{(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha\beta+\gamma')-\gamma(\alpha\alpha'+\gamma\gamma')\}^2+\{(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha'-\beta\gamma)-\alpha(\alpha\alpha'+\gamma\gamma')\}^2}}{\varkappa_1^3} =$$

$$= \frac{1}{\varkappa_1^3}\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)^2\{(\alpha\beta+\gamma')^2+(\alpha'-\beta\gamma)^2\}+(\alpha\alpha'+\gamma\gamma')^2(\alpha^2+\gamma^2)-2(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha\alpha'+\gamma\gamma')\{\gamma(\alpha\beta+\gamma')+\alpha(\alpha'-\beta\gamma)\}}$$

$$= \frac{1}{\varkappa_1^3}\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)^2\{(\alpha\beta+\gamma')^2+(\alpha'-\beta\gamma)^2\}+(\alpha\alpha'+\gamma\gamma')^2(\alpha^2+\gamma^2)-2(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha\alpha'+\gamma\gamma')^2}$$

$$= \frac{1}{\varkappa_1^2}\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)\{(\alpha\beta+\gamma')^2+(\alpha'-\beta\gamma)^2\}-(\alpha\alpha'+\gamma\gamma')^2}$$

$$= \frac{1}{\varkappa_1^2}\sqrt{(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2+2\beta(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')+\beta^2(\alpha^2+\gamma^2)^2}$$

$$= \frac{|\alpha\gamma'-\gamma\alpha'+\beta(\alpha^2+\gamma^2)|}{\alpha^2+\gamma^2}$$

finalement à la formule:

$$\varkappa_2 = \varepsilon\left\{\beta+\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha^2+\gamma^2,}\right\}, \quad \varepsilon^2 = 1. \tag{196}$$

On sait que pour $n=3$ on peut donner une définition algébrique de la seconde courbure $\varkappa_2$ en lui assignant un signe tel que le trièdre $(\underset{1}{\boldsymbol{i}}, \underset{2}{\boldsymbol{i}}, \underset{3}{\boldsymbol{i}})$ soit dextrorsum. Si la surface V_2 peut être orientée (si elle n'est pas une surface fermée, nous ne possédons pas un moyen invariant de l'orienter même si V_3 est orienté), nous pourrons attribuer un sens préféré aux vecteurs $\underset{3}{\boldsymbol{t}}$ et choisir les sens des vecteurs $\underset{2}{\boldsymbol{t}}$ de manière que le système $(\underset{1}{\boldsymbol{t}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \underset{3}{\boldsymbol{t}})$ soit de même orientation que le système $(\underset{1}{\boldsymbol{i}}, \underset{2}{\boldsymbol{i}}, \underset{3}{\boldsymbol{i}})$. De ce moment *les signes des courbures superficielles seront déterminés univoquement* ce qui permettra de déterminer univoquement le signe ε dans la formule (196). On pourra le faire, comme on le verra dans un instant, sans se servir de la condition $\varkappa_2 \geqslant 0$, dans le cas où les curbures hypersuperficielles α, β, γ ne sont pas déterminées univoquement à cause du manque d'orientation de la surface V_2.

Proposition. *Si l'on change l'orientation de la surface V_2, la courbure β ne varie pas tandis que les courbures α, γ changent de signe.*

La démonstration est immédiate. Désignons par $\underset{2}{\bar{\boldsymbol{t}}}, \underset{3}{\bar{\boldsymbol{t}}}$ le système de vecteurs obtenu en changeant l'orientation de la surface V_2.

Dans ce cas, puisque $\underset{1}{\boldsymbol{t}}$ ne change pas et que les systèmes $(\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \underset{3}{\boldsymbol{t}})$ et $(\underset{2}{\bar{\boldsymbol{t}}}, \underset{3}{\bar{\boldsymbol{t}}})$ (qui sont dans le même plan) doivent avoir la même orientation, auront lieu les relations

$$\text{(a)} \qquad \underset{2}{\bar{\boldsymbol{t}}} = -\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \quad \underset{3}{\bar{\boldsymbol{t}}} = -\underset{3}{\boldsymbol{t}}.$$

Les équations (1) se transforment, à cause de cela, en équations suivantes:

$$\text{(b)} \qquad \left|\begin{aligned} \frac{d\underset{1}{\boldsymbol{t}}}{ds} &= -\alpha\underset{2}{\bar{\boldsymbol{t}}} - \gamma\underset{3}{\bar{\boldsymbol{t}}} \\ \frac{d\underset{2}{\bar{\boldsymbol{t}}}}{ds} &= \alpha\underset{1}{\boldsymbol{t}} + \beta\underset{3}{\bar{\boldsymbol{t}}} \\ \frac{d\underset{3}{\bar{\boldsymbol{t}}}}{ds} &= \gamma\underset{1}{\boldsymbol{t}} - \beta\underset{2}{\bar{\boldsymbol{t}}}. \end{aligned}\right.$$

Il en résulte de suite que

$$\text{(c)} \qquad \overline{\alpha} = -\alpha, \quad \overline{\beta} = \beta, \quad \overline{\gamma} = -\gamma,$$

ce qui démontre notre proposition.

De cette proposition il résulte que l'expression entre parenthèses du second membre de (196) ne varie pas si l'on remplace α, β, γ par $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$. On en conclue que le signe de ε dans la formule (196) peut être fixé sans qu'on tienne compte de l'orientation de la surface V_2. Pour le faire, remarquons qu'à cause de l'égalité $\underset{1}{\boldsymbol{t}} = \underset{1}{\boldsymbol{i}}$, tous les quatre vecteurs $\underset{2}{\boldsymbol{i}}, \underset{3}{\boldsymbol{i}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \underset{3}{\boldsymbol{t}}$ sont situés dans le même plan et il suffit d'exiger que les couples $(\underset{2}{\boldsymbol{i}}, \underset{3}{\boldsymbol{i}})$ et $(\underset{2}{\boldsymbol{t}}, \underset{3}{\boldsymbol{t}})$ soient de même orientation. On a d'une part les équations de Frenet

$$\text{(d)} \qquad D\underset{1}{\boldsymbol{i}} = \varkappa_1 \cdot \underset{2}{\boldsymbol{i}}, \quad D\underset{2}{\boldsymbol{i}} = -\varkappa_1 \underset{1}{\boldsymbol{i}} + \varkappa_2 \underset{3}{\boldsymbol{i}}, \quad D\underset{3}{\boldsymbol{i}} = -\varkappa_2 \cdot \underset{2}{\boldsymbol{i}},$$

d'autre part les équations de Kowalewski

$$\text{(e)} \qquad D\underset{1}{\boldsymbol{i}} = \alpha \underset{2}{\boldsymbol{t}} + \gamma \underset{3}{\boldsymbol{t}}, \quad D\underset{2}{\boldsymbol{t}} = -\alpha \underset{1}{\boldsymbol{i}} + \beta \underset{3}{\boldsymbol{t}}, \quad D\underset{3}{\boldsymbol{t}} = -\gamma \underset{1}{\boldsymbol{i}} - \beta \underset{2}{\boldsymbol{t}}.$$

En posant

$$\text{(f)} \qquad \left| \begin{array}{l} \underset{2}{\boldsymbol{i}} = \varrho \underset{2}{\boldsymbol{t}} + \sigma \underset{3}{\boldsymbol{t}} \\ \underset{3}{\boldsymbol{i}} = \tau \underset{2}{\boldsymbol{t}} + \omega \underset{3}{\boldsymbol{t}} \end{array} \right.$$

nous demandons que

$$\text{(g)} \qquad \Delta = \varrho\omega - \sigma\tau > 0.$$

En effectuant la différentiation *covariante* sur les deux membres des équations (f) on aura en tenant compte des relations (d) et (e) et de l'indépendance linéaire des vecteurs $(\underset{1}{\boldsymbol{i}}, \underset{2}{\boldsymbol{t}}, \underset{3}{\boldsymbol{t}})$:

$$\text{(h)} \qquad \left| \begin{array}{l} \alpha\varrho + \gamma\sigma = \varkappa_1 \\ \varrho' - \beta\sigma = \varkappa_2 \tau \\ \sigma' + \beta\varrho = \varkappa_2 \omega \\ \alpha\tau + \gamma\omega = 0 \\ \tau' - \beta\omega = -\varkappa_2 \varrho \\ \omega' + \beta\tau = -\varkappa_2 \sigma. \end{array} \right.$$

Deux de ces relations sont algébriques et quatre différentielles. Au moyen d'un certain artifice on en tire quatre relations algébriques qui lient les coefficients cherchés $\varrho, \sigma, \tau, \omega$. On différentie pour cela les deux membres de la première et de la quatrième relation. Nous obtiendrons:

$$\text{(i)} \qquad \alpha'\varrho + \gamma'\sigma + \alpha\varrho' + \gamma\sigma' = \varkappa_1' = \frac{\alpha\alpha' + \gamma\gamma'}{\varkappa_1}$$

$$\text{(j)} \qquad \alpha'\tau + \gamma'\omega + \alpha\tau' + \gamma\omega' = 0;$$

si l'on élimine ensuite de ces équations $\varrho', \sigma', \tau', \omega'$ au moyen de la deuxième, troisième, cinquième et sizième équation (h), on arrive à ce que:

$$\text{(k)} \qquad \begin{cases} \alpha'\varrho + \gamma'\sigma + \alpha\beta\sigma + \alpha\varkappa_2\tau - \gamma\beta\varrho + \gamma\varkappa_2\omega = \dfrac{\alpha\alpha' + \gamma\gamma'}{\varkappa_1} \\ \alpha'\tau + \gamma'\omega + \alpha\beta\omega - \alpha\varkappa_2\varrho - \beta\gamma\tau - \gamma\varkappa_2\sigma = 0. \end{cases}$$

La deuxième des équations obtenues donne, en tenant compte de la première des équations (h):

$$\text{(l)} \qquad (\alpha' - \beta\gamma)\tau + (\gamma' + \alpha\beta)\omega = \varkappa_1\varkappa_2.$$

La première des équations (k) conduit, par contre, en tenant compte de la quatrième équation (h), à la conclusion:

$$\text{(m)} \qquad (\alpha' - \beta\gamma)\varrho + (\gamma' + \alpha\beta)\sigma = \frac{\alpha\alpha' + \gamma\gamma'}{\varkappa_1}.$$

En résolvant successivement chacun de systèmes:

$$\text{(n)} \qquad \begin{cases} \alpha\varrho + \gamma\sigma = \varkappa_1 \\ (\alpha' - \beta\gamma)\varrho + (\gamma' + \alpha\beta)\sigma = \dfrac{\alpha\alpha' + \gamma\gamma'}{\varkappa_1} \end{cases}$$

$$\text{(p)} \qquad \begin{cases} \alpha\tau + \gamma\omega = 0 \\ (\alpha' - \beta\gamma)\tau + (\gamma' + \alpha\beta)\omega = \varkappa_1\varkappa_2 \end{cases}$$

nous obtiendrons par une voie purement algébrique les grandeurs cherchées $\varrho, \sigma, \tau, \omega$. En désignant, notamment, par W le déterminant commun des coefficients de deux systèmes, qui est égal, à cause de la formule (196), à

$$\text{(q)} \qquad W = \varepsilon(\alpha^2 + \gamma^2)\varkappa_2 \neq 0$$

On intègre cette équation en introduisant une nouvelle variable $q = \beta'$ et en considérant β comme variable indépendante. L'équation transformée sera:

$$2\beta q \frac{dq}{d\beta} - 3q^2 + 4\beta^4 + 4C\beta^2 = 0. \tag{206}$$

Le changement de la variable dépendante

$$q = \frac{\beta}{z} \tag{207}$$

conduit à une équation de Bernoulli

$$\frac{dz}{d\beta} = -\frac{z}{2\beta} + 2\left(\beta + \frac{C}{\beta}\right) z^3 \tag{208}$$

qui s'intègre effectivement et qui conduit à l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{d\beta}{\beta\sqrt{-4\beta^2 + D\beta + 4C}}, \tag{209}$$

où D est une constante d'intégration. Pour calculer cette intégrale, il faut distinguer deux cas particuliers suivant le signe de la constante C (c'est à dire de la courbure μ_1). Nous laissons de côté les détails des calculs et nous donnons le résultat final.

Dans le cas de $C > 0$, nous obtenons pour la fonction cherchée β (de la variable indépendante s) la forme suivante:

$$\beta = \frac{C}{\beta_1 \operatorname{Sin} h^2 (\sqrt{C} \cdot s + E) - \beta_2 \operatorname{Cos} h^2 (\sqrt{C} \cdot s + E)}, \tag{210}$$

où E est la constante arbitraire d'intégration et β_1 et β_2 sont deux racines (réelles) de l'équation

$$-4\beta^2 + D\beta + 4C = 0, \tag{211}$$

la racine β_1 étant plus petite que β_2:

$$\beta_1 < \beta_2. \tag{212}$$

Puisque $\beta_1 \cdot \beta_2 = -C < 0$ on aura $\beta_1 < 0 < \beta_2$ et le dénominateur de l'expression du second membre de la formule (210) est toujours négatif. Il en résulte que l'on a toujours

$$\beta < 0. \tag{213}$$

Dans le cas de $C<0$ nous aurons pour la fonction cherchée β la formule suivante:

$$\beta = \frac{-C}{\beta_1 \cos^2 (\sqrt{-C}\, s + E) + \beta_2 \sin^2 (\sqrt{-C}\, s + E)}, \tag{214}$$

où la signification des constantes β_1 et β_2 est la même qu'avant. Dans le cas de $C<0$ le produit

$$\beta_1 \cdot \beta_2 > 0$$

et le dénominateur du second membre de (214) garde de nouveau le signe constant. Dans ce cas on doit avoir $D \neq 0$ et le signe des nombres β_1, β_2 et par suite celui de la fonction β dépend du signe de la constante (d'intégration) D. Nous avons notamment:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta < 0 \quad \text{pour} \quad D > 0 \\ \beta > 0 \quad \text{pour} \quad D < 0. \end{array} \right. \tag{215}$$

Les formules (210) et (214) montrent une certaine analogie. Elle n'est cependant pas complète, puisque la formule (214) ne peut pas être obtenue de la formule (210) en remplacant C par $-C$ et les fonctions hyperboliques par des fonctions trigonometriques. Il faut noter que les formules (210) et (214) ne se transforment pas en formule (204) pour $C=0$.

Considérons maintenant le cas $r=2$ quand $\varkappa_1 \neq 0$ et $\varkappa_2 = 0$. Des (193) et (196) on tire

$$\alpha^2 + \gamma^2 > 0 \tag{216}$$

et

$$\beta = \frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\alpha^2 + \gamma^2}. \tag{217}$$

Nous allons examiner successivement tous les cas, qui peuvent avoir lieu:

$$m=1; \quad m=2; \quad m=3.$$

Dans le premier cas on aura, à cause de (151), $\beta = \gamma = 0$ et par suite $\alpha \neq 0$.

La courbe n'a pas de B-courbure et il n'y aura plus rien d'intéressant à dire à ce sujet. Passons au cas plus intéressant de $m=2$.

Les relations (157) et (158) donnent dans ce cas

$$\beta^2+\gamma^2>0 \tag{218}$$

et

$$\alpha=\frac{\beta\gamma'-\gamma\beta'}{\beta^2+\gamma^2}. \tag{219}$$

La courbe aura une B-courbure μ_1 donnée par la formule (164)

Considérons d'abord le cas particulier

$$\beta=0. \tag{220}$$

Ceci donne, à cause de (219)

$$\alpha=0 \tag{221}$$

et l'on doit avoir

$$\gamma\neq 0. \tag{222}$$

La courbure μ_1 sera alors égale à

$$\mu_1=-\gamma^2+\frac{3}{4}\frac{\gamma'^2}{\gamma^2}-\frac{1}{2}\frac{\gamma''}{\gamma}. \tag{223}$$

Nous voyons que c'est une formule tout à fait analogue à la formule (202) et peut être obtenue de celle-là en remplaçant la lettre β par la lettre γ.

Supposons maintenant que

$$\beta\neq 0. \tag{224}$$

Puisque l'inégalité (222) doit subsister en tout cas (car autrement on aurait à cause de (219) $\alpha=0$ et une contradiction avec (216)), les équations (217) et (219) peuvent être récrites sous la forme

$$\begin{cases}\beta=\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)'\\[2ex] \alpha=\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\gamma}{\beta}\right)'\end{cases} \tag{225}$$

Les relations (225) permettent, comme nous le verrons, d'exprimer les fonctions β et γ à l'aide de la fonction α et d'une constante arbitraire (d'intégration) C. En éliminant des relations (225) d'abord la fonction γ on trouve

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\gamma}=\int\beta ds\longrightarrow\alpha=\gamma\cdot\operatorname{tg}\left[\int\beta ds\right]$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\gamma}{\beta}=\int\alpha ds\longrightarrow\gamma=\beta\cdot\operatorname{tg}\left[\int\alpha ds\right],$$

d'où

(226) $$\alpha=\beta\cdot\operatorname{tg}\left[\int\alpha\,ds\right]\cdot\operatorname{tg}\left[\int\beta\,ds\right].$$

En désignant:

(227) $$\int\alpha\,ds=\varrho,\quad\int\beta\,ds=\sigma$$

nous pouvons récrire (226) sous la forme

(228) $$\varrho'=\sigma'\cdot\operatorname{tg}\varrho\cdot\operatorname{tg}\sigma$$

ou bien sous la forme:

(229) $$\int\operatorname{ctg}\varrho\,d\varrho=\int\operatorname{tg}\sigma\,d\sigma.$$

L'intégration donne

(230) $$\sin\varrho\cdot\cos\sigma=C,$$

d'où

(231) $$\cos\sigma=\frac{C}{\sin\left[\int\alpha\,ds\right]}.$$

De la dernière relation nous obtenons:

(232) $$\sigma'=C\cdot\frac{\alpha\operatorname{ctg}\left[\int\alpha\,ds\right]}{\sqrt{\sin^2\left[\int\alpha\,ds\right]-C^2}}.$$

Mais

(233) $$\beta=\sigma',\quad\gamma=\beta\cdot\operatorname{tg}\left[\int\alpha\,ds\right].$$

De (232) et (233) on a finalement les formules

(234) $$\left|\begin{aligned}\beta&=\frac{C\cdot\alpha\cdot\operatorname{ctg}\left[\int\alpha\,ds\right]}{\sqrt{\sin^2\left[\int\alpha\,ds\right]-C^2}}\\ \gamma&=\frac{C\cdot\alpha}{\sqrt{\sin^2\left[\int\alpha\,ds\right]-C^2}}.\end{aligned}\right.$$

En passant au cas le plus général $r=3$ ou $m=3$ nous allons faire une supposition supplémentaire que toutes les trois courbures superficielles α,β,γ soient constantes le long de la courbe envisagée. Dans ce cas la formule (193) ne change pas. Par contre la formule (196*) se réduit à

(235) $$\varkappa_2=\beta.$$

Les deux courbures $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ sont alors constantes. Il est facile de prévoir que les B-courbures seront aussi constantes. Pour $m=2$ on a

$$\alpha = 0. \tag{236}$$

La courbure μ_1 calculée de la formule (164) sera égale:

$$\mu_1 = -\frac{\beta^6+\gamma^6+3\beta^4\gamma^2+3\beta^2\gamma^4}{(\beta^2+\gamma^2)^2} = -(\beta^2+\gamma^2). \tag{237}$$

On voit de là que la courbure μ_1 est toujours négative

$$\mu_1 < 0. \tag{238}$$

Dans le cas $m=3$ nous avons (voir l'inégalité (170)):

$$M = \alpha(\beta^2+\gamma^2) \neq 0. \tag{239}$$

Le „facteur normalisant" σ déterminé par la formule (170) sera constant. Les équations (169) servant à calculer les courbures μ_1 et μ_2 se réduisent alors aux équations:

$$\left|\begin{aligned} -\mu_2\sigma\gamma &= \gamma\Omega\sigma \\ \mu_2\sigma\beta &= -\beta\Omega\sigma \\ \mu_1\sigma &= 0. \end{aligned}\right. \tag{240}$$

Puisque

$$\sigma = [\alpha(\beta^2+\gamma^2)]^{-1/3} \neq 0, \tag{241}$$

la dernière des équations (240) donne

$$\mu_1 \equiv 0 \tag{242}$$

tandis que la première de ces équations conduit, à cause de (239), à la conclusion:

$$\mu_2 = -\Omega = -(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = -(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2). \tag{243}$$

Nous constatons alors que *pour les courbes dont l'ordre de la B-platitude est égal à 3 et dont les courbures superficielles sont constantes, la première B-courbure μ_1 est identiquement nulle et la seconde est négative (et constante).*

Remarquons enfin que dans le cas où α, β sont constantes la supposition $r=m=2$ conduit, en tenant compte des formules (217) et (219), à la conclusion

$$\alpha = \beta = 0. \tag{244}$$

La ligne sera alors géodesique et celle de courbure en même temps.

SUR L'UNICITÉ DES SOLUTIONS DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LES ESPACES ABSTRAITS

Par JAN G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław)

Nous énonçons dans cette note un simple théorème d'unicité pour les deux équations différentielles

$$ax'(\lambda) + bx(\lambda) = c(\lambda) \tag{1}$$

et

$$ax''(\lambda) + bx(\lambda) = c(\lambda), \tag{2}$$

considérées dans certains espaces abstraits.

On suppose que les fonctions $x(\lambda)$ et $c(\lambda)$ sont définies dans un intervalle (α, β) de variable réelle λ et que leurs valeurs, ainsi que les coefficients $a \neq 0$ et b, sont des éléments d'un anneau algébrique A, commutatif et sans diviseurs de zéro. La dérivée peut être définie d'une manière quelconque, pourvu que les conditions suivantes soient remplies:

1⁰ Si les fonctions $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ sont dérivables dans (α, β), alors leurs somme et produit sont encore dérivables dans cet intervalle et l'on a

$$[x_1(\lambda) \pm x_2(\lambda)]' = x_1'(\lambda) \pm x_2'(\lambda),$$
$$[x_1(\lambda)\, x_2(\lambda)]' = x_1'(\lambda)\, x_2(\lambda) + x_1(\lambda)\, x_2'(\lambda);$$

2⁰ Si $x(\lambda)$ est dérivable pour $\alpha < \lambda < \beta$, alors la fonction $y(\lambda) = x(\mu - \lambda)$ est dérivable pour $\alpha < \mu - \lambda < \beta$ et l'on a

$$y'(\lambda) = -x'(\mu - \lambda);$$

3⁰ La dérivée $x'(\lambda)$ est nulle dans (α, β) lorsque la fonction $x(\lambda)$ est constante et seulement dans ce cas.

Cela posé, on a le théorème suivant:

(i) *Il existe au plus une solution* $x(\lambda)$ *de* (1) *pour laquelle on a* $x(\lambda_0)=k$, *où* λ_0 *est un point donné de* (α,β) *et* k *un elément donné de* A.

(ii) *Il existe au plus une solution* $x(\lambda)$ *de* (2) *pour laquelle on a* $x(\lambda_0)=k_1$ *et* $x'(\lambda_0)=k_2$, *où* λ_0 *est un point donné de* (α,β) *et* k_1, k_2 *sont deux éléments donnés de* A.

(iii) *Les deux propositions précédentes sont aussi vraies lorsqu'on néglige dans* (1) *et* (2) *l'un quelconque, ou bien tous les deux, des coefficients* a *et* b.

Démonstration. (i) Lorsque $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ satisfont dans (α,β) à l'équation (1) et que $x_1(\lambda_0)=x_2(\lambda_0)=k$, alors la différence $x(\lambda)=x_1(\lambda)-x_2(\lambda)$ satisfait, en vertu de 1⁰ et 3⁰, à l'équation homogène

$$ax'(\lambda)+bx(\lambda)=0 \tag{3}$$

avec la condition initiale $x(\lambda_0)=0$. Il suffit de montrer que $x(\lambda)=0$ dans l'intervalle (α,β) tout entier.

Posons

$$y(\mu)=ax(\mu)x(2\lambda-\mu),$$

où λ est fixé arbitrairement dans (α,β). On vérifie facilement, d'après 1⁰, 2⁰ et (3), que $y'(\mu)=0$, lorsque μ et $2\lambda-\mu$ appartiennent à (α,β). Donc, en vertu de 2⁰, $y(\mu)$ est constante dans la partie commune des deux intervalles (α,β) et $(2\lambda-\beta,\ 2\lambda-\alpha)$. En particulier on a donc

$$x(\lambda)x(\lambda)=x(\mu)x(2\lambda-\mu). \tag{4}$$

Comme λ a été fixé arbitrairement dans (α,β), l'égalité (4) est exacte pour tous les λ et μ de (α,β) tels que $\alpha<2\lambda-\mu<\beta$.

Si $x(\mu)=0$ pour un certain $\mu\in(\alpha,\beta)$, on a donc $x(\lambda)=0$ pour $\dfrac{\alpha+\mu}{2}<\lambda<\dfrac{\mu+\beta}{2}$. Pour achever la démonstration il suffit de remarquer que si (I) une proposition P est vraie pour un certain $\lambda_0\in(\alpha,\beta)$ et si (II) la supposition que P est vraie pour un certain $\mu\in(\alpha,\beta)$ entraîne qu'elle l'est pour tout $\lambda\in\left(\dfrac{\alpha+\mu}{2},\dfrac{\mu+\beta}{2}\right)$, alors P est vraie pour tout $\lambda\in(\alpha,\beta)$.

(ii) Pour les mêmes raisons que dans le cas de (i) il suffit de démontrer que si

$$ax''(\lambda)+bx(\lambda)=0 \ \text{ pour } \ \alpha<\lambda<\beta \ \text{ et } \ x(\lambda_0)=x'(\lambda_0)=0, \tag{5}$$

alors $x(\lambda)=0$ pour $\alpha<\lambda<\beta$.

Posons

$$y(\mu)=ax(\mu)x'(2\lambda-\mu)+ax'(\mu)x(2\lambda-\mu),$$

où λ est fixé arbitrairement dans (α,β). En tenant compte de 1°, 2°, 3° et (5), on vérifie sans peine que $y'(\mu)=0$ pour μ et $2\lambda-\mu$ appartenant à (α,β). Donc $y(\mu)$ est constante et, comme λ a été choisi arbitrairement, on a

$$x(\lambda)x'(\mu)+x'(\lambda)x(\mu)=x(\bar\lambda)x'(\bar\mu)+x'(\bar\lambda)x(\bar\mu), \tag{6}$$

pourvu que tous les nombres λ, μ, $\bar\lambda$ et $\bar\mu$ appartiennent à l'intervalle (α,β) et que $\lambda+\mu=\bar\lambda+\bar\mu$.

Supposons que $x(\bar\mu)=x'(\bar\mu)=0$ pour un certain $\bar\mu\in(\alpha,\beta)$. Alors l'égalité (6) deviendra

$$x(\mu)x'(\lambda)+x'(\mu)x(\lambda)=0.$$

Si l'on admettait que $x(\mu)\neq 0$ pour un certain μ de l'intervalle $\left(\frac{\alpha+\bar\mu}{2},\frac{\bar\mu+\beta}{2}\right)$, on aurait, d'après la proposition (i), $x(\lambda)=0$ dans cet intervalle, ce qui est absurde. Donc $x(\lambda)=0$ et, par conséquent, $x'(\lambda)=0$ pour tout $\lambda\in\left(\frac{\alpha+\bar\mu}{2},\frac{\bar\mu+\beta}{2}\right)$.

Pour achever la démonstration, il suffit d'appliquer le même raisonnement final que dans le cas de (i).

(iii) Les démonstrations précédentes sont évidemment applicables lorsqu'on néglige les coefficients a ou b.

Nous donnerons encore un exemple qui montre que la supposition que A n'ait pas de diviseurs de zéro ne peut pas être supprimée dans le théorème précédent. Soit en effet A l'ensemble des fonctions $a=\{a(t)\}$[1]) continûment dérivables

---

[1]) Nous employons ici les crochets pour distinguer la *fonction* $\{a(t)\}$ et sa *valeur* $a(t)$ au point t.

dans l'intervalle $[0,1]$, l'addition et la multiplication de ses éléments étant définies par les relations

$$a + b = \{a(t)\} + \{b(t)\} = \{a(t) + b(t)\},$$

$$a \cdot b = \{a(t)\} \cdot \{b(t)\} = \left\{\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau\right\}.$$

Cela posé A est un anneau algébrique commutatif. Or cet anneau posséde des diviseurs de zéro, on a par exemple $a \cdot a = 0$ lorsque la fonction $a = \{a(t)\}$ est nulle pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ et non nulle pour $\frac{1}{2} < t \leqslant 1$. En posant par définition

$$a'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\{a(\lambda, t)\} = \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda} a(\lambda, t)\right\},$$

la dérivée satisfait aux conditions 1^0, 2^0 et 3^0.

L'équation

$$\{1\} x'(\lambda) = x(\lambda) \text{ avec la condition } x(0) = 0$$

équivaut à l'équation intégro-différentielle

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda} x(\lambda, \tau)\, d\tau = x(\lambda, t) \text{ avec } x(0, t) = 0$$

ou bien à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} x(\lambda, t) = \frac{\partial}{\partial t} x(\lambda, t)$$

avec les conditions initiales $x(0, t) = x(\lambda, 0) = 0$. Si l'on considère cette équation dans le rectangle $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-1 < \lambda < +1$, l'unicité de la solution n'est évidemment pas assurée.

Un exemple analogue peut être construit pour l'équation de deuxième ordre (2).

UNE DÉMONSTRATION UNIFORME DU THÉORÈME GÉNÉRALISÉ DE L'HÔSPITAL

Par TADEUSZ WAŻEWSKI (Kraków)

Le théorème classique de L'Hôpital comprend 60 cas particuliers. La démonstration usuelle consiste à réduire ces cas à certains cas particuliers qui, ensuite, sont traités séparément.

Or j'ai indiqué précédement une démonstration uniforme du théorème classique de L'Hôpital[1]). J'ai remarqué récemment que le même lemme élémentaire que j'y ai introduit (§ 1) peut servir de base à la démonstration du théorème généralisé de L'Hôpital (§ 2)[2]).

Dans le § 3 nous traitons le cas où les fonctions intervenant dans le théorème généralisé de L'Hôpital sont absolument continues.

En vue de l'application éventuelle à l'enseignement il y a lieu d'observer que notre démonstration du théorème *généralisé* de L'Hôpital est accessible aux élèves qui connaissent 1⁰) la définition de la limite supérieure et inférieure d'une fonction au sens de Heine 2⁰) qui savent que les relations

$$p_n \to 0, \quad q_n \to 1, \quad r_n \to l$$

(où l est fini ou bien infini) entraînent les relations $q_n r_n \to l$, $p_n + r_n \to l$.

La démonstration du théorème classique de L'Hôpital suppose (au lieu de la définition 1⁰) la connaissance de la définition de la limite ordinaire d'une fonction au sens de Heine et la connaissance du fait que dans chaque suite qui ne converge pas vers un nombre m (fini ou non) on peut choisir une suite tendant vers un nombre (fini ou non) t qui est different de m.

---

1) T. Ważewski, *Quelques démonstrations uniformes pour tous les cas du théorème de L'Hôpital* (pour paraître dans les „Prace Matematyczno-Fizyczne").

2) Communiqué le 22. VI. 1948 au cours d'une séance de la Soc. Pol. de Math. (Section de Cracovie).

§ 1. Lemme 1. Supposons que, pour deux suites de nombres $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, on ait les propriétés suivantes:

(1) I) $$b_n \neq 0, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

(2) II) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

où l est fini ou bien $l=+\infty$ ou bien $l=-\infty$.

III) On a ou bien

(3) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

ou bien

(4) $$\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty.$$

Ceci étant admis il existe deux suites d'indices

(5) $$\{\gamma_n\} \text{ et } \{\delta_n\}$$

telles que

(6) $$\gamma_n < \gamma_{n+1}, \quad \delta_n < \delta_{n+1}, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

(7) $$b_{\delta_n} \neq b_{\gamma_n}$$

(8) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\delta_n} - a_{\gamma_n}}{b_{\delta_n} - b_{\gamma_n}} = l.$$

Démonstration. *Première étape.* En tenant compte de l'égalité

(9) $$\frac{a_{\delta_n} - a_{\gamma_n}}{b_{\delta_n} - b_{\gamma_n}} = \left(\frac{a_{\delta_n}}{b_{\delta_n}} - \frac{a_{\gamma_n}}{b_{\delta_n}}\right) \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{b_{\gamma_n}}{b_{\delta_n}}}$$

nous chercherons d'abord à démontrer l'existence des suites d'indices $\{\gamma_n\}$ et $\{\delta_n\}$ satisfaisant aux conditions (6) et (7) et pour lesquelles on ait en plus

(10) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\gamma_n}}{b_{\delta_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{\gamma_n}}{b_{\delta_n}} = 0.$$

Si nous réussissons à établir l'existence de telles suites la démonstration de notre lemme se trouvera terminée, car en raison de (2) on aura

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{\delta_n}}{b_{\delta_n}}=l \tag{11}$$

et l'égalité (8) résultera immédiatement des égalités (10), (11) et (9).

Deuxième étape. Afin d'établir l'existence des suites d'indices $\{\gamma_n\}$ et $\{\delta_n\}$ satisfaisant aux conditions (6), (7) et (10) il suffira de prouver l'existence des suites d'indices $\{\gamma_n\}$ et $\{\delta_n\}$ pour lesquelles on a

$$\gamma_n<\gamma_{n+1},\quad \delta_n<\delta_{n+1},\qquad (n=1,2,\ldots) \tag{12}$$

$$\left|\frac{a_{\gamma_n}}{b_{\delta_n}}\right|<\frac{1}{2n},\quad \left|\frac{b_{\gamma_n}}{b_{\delta_n}}\right|<\frac{1}{2n},\qquad (n=1,2,\ldots) \tag{13}$$

car la dernière inégalité implique l'inégalité $b_{\gamma_n}\neq b_{\delta_n}$ (cf. (7)).

Troisième étape. Afin d'établir l'existence des suites satisfaisant aux conditions (12) et (13) nous distinguerons deux cas: (3) et (4).

Dans le cas (3) on a pour tout indice n fixe les relations:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{a_r}{b_n}=\lim_{r\to\infty}\frac{b_r}{b_n}=0.$$

Désignons par γ_1 le plus petit indice r pour lequel on a à la fois

$$\left|\frac{a_r}{b_1}\right|<\frac{1}{2},\quad \left|\frac{b_r}{b_1}\right|<\frac{1}{2}$$

et désignons par γ_{n+1} le plus petit indice r pour lequel on a à la fois

$$\gamma_n<r,\quad \left|\frac{a_r}{b_{n+1}}\right|<\frac{1}{2(n+1)},\quad \left|\frac{b_r}{b_{n+1}}\right|<\frac{1}{2(n+1)}.$$

En posant $\delta_n=n$ on voit que les relarions (12) et (13) ont lieu pour $n=1,2,\ldots$

Dans le cas (4) on a pour tout n fixe les relations

$$\lim_{r\to\infty}\frac{a_n}{b_r}=0, \quad \lim_{r\to\infty}\frac{b_n}{b_r}=0.$$

Désignons par δ_1 le plus petit indice r pour lequel on a à la fois

$$\left|\frac{a_1}{b_r}\right|<\frac{1}{2}, \quad \left|\frac{b_1}{b_r}\right|<\frac{1}{2}$$

et désignons par δ_{n+1} le plus petit indice r pour lequel on a à la fois

$$\delta_n<r, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{b_r}\right|<\frac{1}{2(n+1)}, \quad \left|\frac{b_{n+1}}{b_r}\right|<\frac{1}{2(n+1)}.$$

En posant $\gamma_n=n$ on voit que les relations (12) et (13) ont lieu. La démonstration de notre lemme se trouve ainsi terminée.

Hypothèse H intervenant dans le théorème de L'Hôpital.

I. Les dérivées (finies)

$$f'(x), \quad g'(x)$$

existent dans un intervalle ouvert, borné ou non, Δ. On a [3])

(14) $$g(x)\neq 0, \quad g'(x)\neq 0 \quad \text{dans } \Delta.$$

II. La lettre k désigne une extrémite (droite ou gauche) de Δ. (Le nombre k peut être fini ou bien on peut avoir $k=+\infty$ ou $k=-\infty$).

III. On a ou bien

(15) $$\lim_{x\to k} f(x)=\lim_{x\to k} g(x)=0$$

ou bien

(16) $$\lim_{x\to k}|g(x)|=+\infty.$$

Lemme 2. En admettant l'hypothèse H supposons que pour une suite de points x_n on ait

(17) $$x_n\in\Delta, \ (n=1,2,\ldots); \quad x_n\to k, \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to l$$

(où l est un nombre fini, ou bien on a $l=+\infty$ ou $l=-\infty$).

---

[3]) L'hypothèse $g(x)\neq 0$ n'est pas essentielle dans la suite, car en raison de $g'(x)\neq 0$, la fonction $g(x)$ est monotonne au sens strict et ne peut s'anuller qu'en un point unique.

Cela posé, il existe une suite de points $\{\xi_n\}$, telle que

$$\xi_n \in \Lambda, \quad \xi_n \to k, \quad \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to l. \tag{18}$$

Démonstration. Posons

$$a_n = f(x_n), \quad b_n = g(x_n).$$

On a en vertu de (17)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ satisfont aux prémisses du Lemme 1 (cf. 14, 15, 16).

Il existe donc deux suites croissantes d'indices $\{\gamma_n\}$ et $\{\delta_n\}$, telles que pour la suite

$$s_n = \frac{f(x_{\delta_n}) - f(x_{\gamma_n})}{g(x_{\delta_n}) - g(x_{\gamma_n})}$$

on a

$$\varepsilon_n \to l. \tag{19}$$

Mais d'après le théorème généralisé sur les accroissements finis il existe un point ξ_n situé entre x_{γ_n} et x_{δ_n}, tel que

$$\xi_n \in (x_{\gamma_n}, x_{\delta_n}), \quad \varepsilon_n = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}. \tag{20}$$

Comme, en raison de (17) $x_{\gamma_n} \to k$, $x_{\delta_n} \to k$ donc $\xi_n \to k$ et les relations (18) ont lieu en vertu de (19) et (20).

Théorème généralisé de L'Hôpital. Dans l'Hypothèse H on a

$$\liminf_{x\to k} \frac{g'(x)}{f'(x)} \leqslant \liminf_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x\to k} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{21}$$

Démonstration. En posant

$$l = \liminf_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad L = \limsup_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lambda = \liminf_{x\to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \Lambda = \limsup_{x\to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

on doit démontrer que

$$\lambda \leqslant l \leqslant L \leqslant \Lambda.$$

En vertu de la définition de la limite supérieure il existe une suite $\{x_n\}$, telle que

$$x_n \in \Delta, \quad x_n \to k, \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to L.$$

Il existe donc (cf. le Lemme 2) une suite $\{\xi_n\}$, telle que

$$\xi_n \in \Delta, \quad \xi_n \to k, \quad \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to L$$

d'où, en vertu de la définition de la limite supérieure Λ, il résulte que $L \leqslant \Lambda$.

On démontre d'une façon analogue que $\lambda \leqslant l$.

Nous montrerons comment, en s'appuyant sur le Lemme 2, on peut démontrer le théorème classique de L'Hôpital, sans faire appel aux notions de la limite superieure et inferieure.

Admettons l'Hypothèse H et supposons que

$$\lim_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)} = m. \tag{22}$$

Supposons, pour la démonstration par l'impossible, que $\frac{f(x)}{g(x)}$ ne tende pas vers m lorsque x tend vers k. Il existe donc une suite $\{x_n\}$, telle que

$$x_n \in \Delta, \quad x_n \to k, \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to l \text{ où } l \neq m.$$

En vertu du Lemme 2 il existe une suite $\{\xi_n\}$, telle que

$$\xi_n \in \Delta, \quad \xi_n \to k, \quad \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to l \neq m.$$

ce qui est contraire à (22).

§ 3. Théorème généralisé de l'Hôpital au cas des fonctions absolument continues.

Supposons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ soient absolument continues dans tout intervalle borné et fermé faisant parti d'un intervalle ouvert Δ (borné ou non). Soit k une extrémité (droite ou gauche, finie ou non) de Δ. Supposons que l'on ait ou bien

$$\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} g(x) = 0$$

ou bien

$$\lim_{x \to k} |g(x)| = +\infty.$$

Supposons que $g(x) \neq 0$ dans $\varDelta$, que $g(x)$ soit monotonne dans $\varDelta$ et supposons qu'il existe un ensemble de mesure nul Z, tel que les dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$ sont finies dans $\varDelta - Z$ et

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{dans} \quad \varDelta - Z. \tag{23}$$

Posons

$$l = \liminf_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad L = \limsup_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{24}$$

$$\lambda = \liminf_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \varLambda = \limsup_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{25}$$

où λ et $\varLambda$ désignent respectivement la limite inférieure et supérieure que l'on obtient lorsque x tend vers k en variant dans $\varDelta - Z$. Ceci étant admis on a

$$\lambda \leqslant l \leqslant L \leqslant \varLambda.$$

Démonstration. Nous démontrerons d'abord l'inégalité

$$L \leqslant \varLambda. \tag{26}$$

Elle est évidente lorsque $\varLambda = +\infty$.

Supposons donc que

$$\varLambda < +\infty.$$

Il existe donc une suite $\{c_p\}$, telle que

$$\varLambda < c_p < +\infty, \quad \lim_{p \to \infty} c_p = \varLambda. \tag{27}$$

En vertu de la définition de L il existe une suite $\{x_n\}$, telle que

$$x_n \in \varDelta, \quad x_n \to k, \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to L.$$

En vertu du Lemme 1 il existe deux suites croissantes d'indices $\{\gamma_n\}$ et $\{\delta_n\}$, telles que

$$g(x_{\gamma_n}) \neq g(x_{\delta_n})$$

et

$$s_n = \frac{f(x_{\delta_n}) - f(x_{\gamma_n})}{g(x_{\delta_n}) - g(x_{\gamma_n})} \to L. \tag{28}$$

Comme $g(x)$ est monotonne dans $\varDelta$ on a (cf. (23))

$$g'(x) = \varepsilon |g'(x)| \quad \text{dans} \quad \varDelta - Z$$

où $\varepsilon = +1$ ou bien $\varepsilon = -1$ suivant que $g(x)$ est croissante ou décroissante dans $\varDelta$.

Désignons par ω_n l'intervalle $[x_{\gamma_n}, x_{\delta_n}]$ et posons

$$\eta_n = \text{signum}\,(x_{\delta_n} - x_{\gamma_n}).$$

On aura

$$f(x_{\delta_n}) - f(x_{\gamma_n}) = \int_{x_{\gamma_n}}^{x_{\delta_n}} f'(x)\,dx = \eta_n \int_{\omega_n} f'(x)\,dx =$$

$$= \eta_n\,\varepsilon \int_{\omega_n - Z} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,|\,g'(x)\,|\,dx,$$

$$g(x_{\delta_n}) - g(x_{\gamma_n}) = \eta_n\,\varepsilon \int_{\omega_n - Z} |\,g'(x)\,|\,dx,$$

donc en posant

(29) $$I_n = \int_{\omega_n - Z} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,|\,g'(x)\,|\,dx, \quad K_n = \int_{\omega_n - Z} |\,g'(x)\,|\,dx,$$

on aura

$$s_n = \frac{I_n}{K_n}.$$

Soit p un indice fixe. Comme les extrémités de ω_n tendent vers k, on aura en vertu de (25) et (27)

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant c_p \quad \text{dans} \quad \omega_n - Z$$

lorsque l'indice n sera suffisamment grand. On aura par suite (cf. (29))

$$I_n \leqslant c_p K_n \quad \text{et} \quad s_n \leqslant c_p$$

pour les n suffisamment grands.

Pour $n \to \infty$ on aura (cf. (28))

$L \leqslant c_p$ d'où pour $p \to +\infty$ on obtiendra (cf. (27)) $L \leqslant \Lambda$.

L'inégalité (26) se trouve ainsi démontrée.

On démontre, dans une voie pareille, que $\lambda \leqslant l$.

En posant $\lambda = \Lambda$ on obtient le suivant:

Corollaire. Si, en gardant les hypothèses du théorème précédent, on suppose en plus que h soit fini ou non et que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to h$$

lorsque x tend vers k en variant dans $\Delta - Z$, alors

$$\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = h.$$

UNE GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE M. OSTROWSKI SUR LA RÉPARTITION DES NOMBRES MOD 1

Par S. Hartman (Wrocław)

K étant un intervalle de longueur $\leqslant 1$ fermé à gauche et ouvert à droite, nous entendons par *l'intervalle K modulo* 1 l'ensemble des nombres $R(a) = a - [a]$, où $a \epsilon K$. Les intervalles modulo 1 seront désignés dans cette note par les lettres I ou J. Les lettres a, α seront employées pour désigner des nombres réels quelconques et les lettres x, y, p et q désigneront des nombres naturels. Ces lettres seront pourvues, s'il y a besoin, d'indices.

$N(\alpha; x; I)$ signifiera le nombre des nombres naturels $y \leqslant x$ tels que $R(y\alpha) \epsilon I$; plus généralement, $N(\alpha_1, \dots, \alpha_n; x; I_1, \dots, I_n)$ signifiera le nombre des nombres naturels $y \leqslant x$ tels que $R(y\alpha_i) \epsilon I_i$ $(i = 1, \dots, n)$

M. A. Ostrowski[1]) a démontré le théorème:

Étant donnés trois nombres: α réel, x naturel et ξ irrationnel positif et non supérieur à 1,

(a) il existe deux intervalles I^+ et I^-, de longueur ξ chacun, pour lesquels $N(\alpha; x; I^+) > x\xi$ et $N(\alpha; x; I^-) < x\xi$.

Lorsque ξ est rationnel on a (a) ou bien

(b) $N(\alpha; x; I) = x\xi$, quel que soit l'intervalle I de longueur ξ.

Nous montrons dans cette note qu'une démonstration analogue peut être appliquée au théorème plus général que voici:

---

[1]) A. Ostrowski, Mathematische Miszellen XVI. *Zur Theorie der linearen diophantischen Approximationen*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 39 (1930), p. 34—46.

Théorème. *Étant donnés deux systèmes de nombres réels* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *et* $\xi_1, \dots, \xi_n$ $(0 < \xi_i \leqslant 1)$, *où l'un au moins des* ξ_i *est irrationnel, et un nombre naturel* x,

(I) il existe deux systèmes d'intervalles $I_1^+, \dots, I_n^+$ *et* $I_1^-, \dots, I_n^-$ *de longueur* $|I_i^+| = |I_i^-| = \xi_i$ $(i = 1, \dots, n)$, *pour lesquels*

$$N(\alpha_1, \dots, \alpha_n;\, x;\, I_1^+, \dots, I_n^+) > x \cdot \prod_{i=1}^{n} \xi_i,$$

$$N(\alpha_1, \dots, \alpha_n;\, x;\, I_1^-, \dots, I_n^-) \leqslant x \cdot \prod_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Si tous les nombres $\xi_1, \dots, \xi_n$ *sont rationnels, on a (I), où le signe* $\leqslant$ *peut être remplacé par* $<$,

ou bien

(II) $N(\alpha_1, \dots, \alpha_n; x; I_1, \dots, I_n) = x \cdot \prod_{i=1}^{n} \xi_i$, *quel que soient les intervalles* I_i $(i = 1, \dots, n)$ *de longueur* ξ_i *respectivement.*

Pour démontrer la prémière partie du théorème, supposons que parmi les ξ_i il y a m nombres irrationnels, soit $\xi_1, \dots, \xi_m$, et que

$$\xi_i = p_i / q_i \quad \text{pour} \quad i = m+1, \dots, n. \tag{1}$$

Choisissons un $\varepsilon > 0$ de manière que

$$R(y\alpha_i) < 1 - \varepsilon \qquad (y = 1, \dots, x;\ i = 1, \dots, m). \tag{2}$$

Alors, en vertu du théorème de KRONECKER,

$$R(q_i \xi_i) > 1 - \varepsilon \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{3}$$

pour une infinité de valeurs de q_i. D'autre part, en posant

$$\Xi(q_1, \dots, q_m) = \frac{x \cdot \prod_{i=m+1}^{n} \xi_i}{\prod_{i=1}^{m} q_i} \cdot \prod_{i=1}^{m} [q_i \xi_i + 1],$$

on a

$$\Big[x \cdot \prod_{i=1}^{n} \xi_i\Big] < \Xi(q_1, \dots, q_m) \tag{4}$$

pour toutes les valeurs de q_i, et

$$\Xi(q_1, \dots, q_m) < \Big[x \cdot \prod_{i=1}^{n} \xi_i + 1\Big] \tag{5}$$

pour les valeurs de q_i suffisamment grandes, car

$$\lim_{\substack{q_i \to \infty \\ i = 1, \dots, m}} \Xi(q_1, \dots, q_m) = x \cdot \prod_{i=1}^{n} \xi_i < \Big[x \cdot \prod_{i=1}^{n} \xi_i + 1\Big].$$

Fixons arbitrairement un système $q_1, \ldots, q_m$ satisfaisant aux inégalités (3)—(5) et désignons par I_i^k l'intervalle $\langle (k-1)\xi_i, k\xi_i)$ modulo 1 $(k=1,\ldots,q_i;\ i=1,\ldots,n)$, où les nombres $q_{m+1},\ldots,q_n$ sont donnés par (1).

Si i est fixe et $1 \leqslant i \leqslant m$, tout point de l'intervalle $\langle 0, 1-\varepsilon)$ appartient, d'après (3), à $[q_i\xi_i+1]$ intervalles I_i^k; si $m+1 \leqslant i \leqslant n$, tout point de l'intervalle $\langle 0,1)$ appartient, d'après (1), à $q_i\xi_i = p_i$ intervalles I_i^k. En posant

$$N_{k_1\ldots k_n} = N(a_1,\ldots,a_n;\ x;\ I_1^{k_1},\ldots,I_n^{k_n}),$$

on a donc, en vertu de (2),

$$\sum_{k_1\ldots k_n} N_{k_1\ldots k_n} = x\prod_{i=1}^{m}[q_i\xi_i+1]\cdot\prod_{i=m+1}^{n} p_i,$$

la somme étant étendue à tous les systèmes d'indices tels que $1 \leqslant k_i \leqslant q_i$ $(i=1,\ldots,n)$; le nombre de ces systemes est $\prod_{i=1}^{n} q_i$. En vertu de (4) et (5) on a

$$[x\cdot\prod_{i=1}^{n}\xi_i] < \frac{\sum N_{k_1\ldots k_n}}{\prod_{i=1}^{n} q_i} < [x\cdot\prod_{i=1}^{n}\xi_i+1].$$

L'expression entre les signes d'inégalité étant la moyenne arithmétique des nombres $N_{k_1\ldots k_n}$, l'un au moins de ces nombres, soit $N_{r_1\ldots r_n}$, est supérieur à $[x\cdot\prod_{i=1}^{n}\xi_i]$ et l'autre, soit $N_{s_1\ldots s_n}$, inférieur à $[x\cdot\prod_{i=1}^{n}\xi_i+1]$. Ces nombres étant entiers, on a encore $N_{r_1\ldots r_n} > x\cdot\prod_{i=1}^{n}\xi_i$ et $N_{s_1\ldots s_n} \leqslant x\cdot\prod_{i=1}^{n}\xi_i$. On a évidemment $|I_i^{r_i}| = |I_i^{s_i}| = \xi_i$ $(i=1,\ldots,n)$, d'où, en posant $I_i^+ = I_i^{r_i}$ et $I_i^- = I_i^{s_i}$ $(i=1,\ldots,n)$, il vient (I).

Pour établir la seconde partie du théorème, supposons que

$$\xi_i = p_i/q_i \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{6}$$

et fixons arbitrairement n nombres $a_1,\ldots,a_n$ dans l'intervalle $\langle 0,1)$.

Posons

$N(a_1,\ldots,a_n;x;J_1^{k_1},\ldots,J_n^{k_n})=M_{k_1\ldots k_n}\quad(1\leqslant k_i\leqslant q_i;\ 1\leqslant i\leqslant n),$

où $J_i^k=\langle a_i+(k-1)\xi_i, a_i+k\xi_i)$ modulo 1.

En vertu de (6) tout point de l'intervalle $\langle 0,1)$ appartient, quel que soit i fixe et $1\leqslant i\leqslant n$, à $q_i\xi_i=p_i$ intervalles J_i^k; on a donc $\sum\limits_{k_1\ldots k_n} M_{k_1\ldots k_n}=x\cdot\prod\limits_{i=1}^n p_i$ et par suite

$$\frac{\sum M_{k_1\ldots k_n}}{\prod\limits_{i=1}^n q_i}=x\cdot\prod_{i=1}^n\xi_i.$$

On en déduit qu'il n'y a que les deux éventualités suivantes:

(i) il existe un système d'indices $r_1,\ldots,r_n$ pour lequel $M_{r_1\ldots r_n}>x\cdot\prod\limits_{i=1}^n\xi_i$ et un système $s_1,\ldots,s_n$ pour lequel $M_{s_1\ldots s_n}<x\cdot\prod\limits_{i=1}^n\xi_i$,

(ii) pour tout système d'indices $k_1,\ldots,k_n$ on a $M_{k_1\ldots k_n}=x\cdot\prod\limits_{i=1}^n\xi_i$.

Si (ii) a lieu, on a en particulier pour $I_i=J_i^1$

$$N(a_1,\ldots,a_n;x;I_1,\ldots,I_n)=x\cdot\prod_{i=1}^n\xi_i.$$

Si on a (i) pour un système $a_1,\ldots,a_n$, donc pour un système $I_1,\ldots,I_n$, alors les inégalités de (I), avec le signe $<$ au lieu de $\leqslant$, sont satisfaites pour $I_i^+=J_i^{r_i}$ et $I_i^-=J_i^{s_i}$ $(i=1,\ldots,n)$. Si on a (ii) pour tout système $a_1,\ldots,a_n$, donc pour tout système $I_1,\ldots,I_n$, on a évidemment (II).

ON ALGEBRAIC EXTENSIONS OF ORDERED FIELDS

By Roman Sikorski (Warszawa)

In my paper [1] [1]) I have associated with every ordered algebraic field [2]) A an regular initial ordinal number [3]) ω_μ called the character of [4]) A. I have shown that in every ordered algebraic field A of character ω_μ one can define [5]), in a very natural way, a limit of an ω_μ-sequence [6]) $\{a_\xi\}$ of elements of A. I have also given an example of an ordered algebraic field (denoted by W_μ) [7]) of character ω_μ [8]) which possesses the following property [9]):

(BW_μ) *Every bounded* [10]) *ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$ contains a convergent ω_μ-subsequence* [11]) $\{a_{\eta_\xi}\}$.

---

[1]) The figures in square brackets refer to the bibliography at the end of this paper.

[2]) See van der Waerden [1], p. 209. We assume the usual notations $0, 1, na, \Sigma, \Pi, a > 0, |a|$ etc. See van der Waerden [1], pp. 37—43 and p. 209.

[3]) An *initial* number ω_μ is the least ordinal number such that the potency of the set of all numbers $\xi < \omega_\mu$ is $\aleph_\mu$. ω_μ is called *regular* if the condition $\mathfrak{m}_\xi < \aleph_\mu$ for $0 \leqslant \xi < \alpha < \omega_\mu$ implies $\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{m}_\xi < \aleph_\mu$. See Sierpiński [1], pp. 213—214 and p. 225.

[4]) Sikorski [1], § 4.

[5]) Sikorski [1], § 5.

[6]) An *ω_μ-sequence* is a mapping which associates with every ordinal number $\xi < \omega_\mu$ an element $a_\xi \in A$.

[7]) W_μ is the least algebraic field containing the set of all ordinal numbers $\xi < \omega_\mu$. See Sikorski [1], § 9. The algebraic operations on ordinal numbers are the so-called natural sum and natural product of Hessenberg. See Hausdorff [2]. p. 68.

[8]) For every $\mu > 0$ such that ω_μ is regular.

[9]) Sikorski [1], Theorem V.

[10]) An ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$ of elements of a field A is *bounded* if there exist two elements $b, c \in A$ such that $b < a_\xi < c$ for every $\xi < \omega_\mu$.

[11]) If $\{\eta_\xi\}$ is an increasing ω_μ-sequence of ordinal numbers $< \omega_\mu$, the ω_μ-sequence $\{a_{\eta_\xi}\}$ is called an *ω_μ-subsequence* of the sequence $\{a_\xi\}$.

For every ordered algebraic field A let $\mathfrak{R}(A)$ and $\mathfrak{A}(A)$ denote respectively the least real-closed[12]) field containing A and the least algebraically closed[13]) field containing A. $\mathfrak{R}(A)$ is also an ordered field, $\mathfrak{A}(A)$ is not ordered.

I shall show in this paper that if A is of character ω_μ, then $\mathfrak{R}(A)$ is also of character ω_μ (Theorem I). I shall define the limit of an ω_μ-sequence of elements of $\mathfrak{A}(A)$ and I shall prove that if A possesses the property (BW_μ), then both $\mathfrak{R}(A)$ and $\mathfrak{A}(A)$ possess also this property (Theorem II).

An immediate consequence of these theorems is that there exist an ordered real-closed field of character ω_μ and an algebraically closed field which possess the property (BW_μ). For instance, the fields $\mathfrak{R}(W_\mu)$ and $\mathfrak{A}(W_\mu)$ possess the property (BW_μ).

1. Ordered fields of character ω_μ. Let A be an ordered algebraic field.

An ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$ of elements of A is said to be *cofinal with* A, in symbols

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} a_\xi = +\infty \quad \text{in} \quad A,$$

provided that for every $a \in A$ there exists an ordinal number $\xi_0 < \omega_\mu$ such that $a_\xi > a$ for every $\xi > \xi_0$ $(\xi < \omega_\mu)$.

It follows from the general theory of ordered sets[14]) that there exists exactly one regular initial number ω_μ such that the field A contains an ω_μ-sequence which is cofinal with A. This number ω_μ is called the *character* of A.

Let $\{a_\xi\}$ be an ω_μ-sequence of elements of the field A (of character ω_μ). We say that the sequence $\{a_\xi\}$ *converges in* A to an element $a \in A$, in symbols

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} a_\xi = a \quad \text{in} \quad A,$$

if for every positive element $\varepsilon \in A$ there exists an ordinal number $\xi_0 < \omega_\mu$ such that

$$|a_\xi - a| < \varepsilon \quad \text{for} \quad \xi > \xi_0 \quad (\xi < \omega_\mu).$$

---

[12]) „Reel-abgeschlossen" — see van der Waerden [1], p. 227.

[13]) „Algebraisch abgeschlossen" — see van der Waerden [1], p. 198.

[14]) Hausdorff [1], p. 132.

An ω_μ-sequence is called *convergent in* A if it converges in A to an element $a \in A$.

For instance, if $\lim a_\xi = +\infty$ ($a_\xi \neq 0$), then $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu}\left(a+\frac{1}{a_\xi}\right) = a$. Thus there exist convergent sequences.

The above-defined notion of the limit of an ω_μ-sequence possesses many properties of the limit of an enumerable sequence of real numbers [15]).

2. The field $\Re(A)$. An algebraic field F is called *real-closed* [12]) if it is ordered and if every polynomial

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (n \geqslant 1,\ a_j \in F)$$

is the product of factors of the form

$$P(x) = (x-b_1)\ldots(x-b_k)\left((x-c_1)^2+d_1^2\right)\ldots\left((x-c_l)^2+d_l^2\right)$$

where $b_j \in F$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, $c_j \in F$ and $d_j \in F$ $(1 \leqslant j \leqslant l)$, $n = k+2l$.

It is well known that for every ordered field A there exists exactly one real-closed field F which is an algebraic extension over A [16]) (i. e. every element of F is a root of a polynomial $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ where $n \geqslant 1$, $a_j \in A$ for $1 \leqslant j \leqslant n$). This field will be denoted by $\Re(A)$. $\Re(A)$ is the least real-closed field containing A.

(i) *For every element* $b \in \Re(A)$ *there exists an element* $a \in A$ *such that* $b < a$.

In fact, b is a root of a polynomial

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

where $n \geqslant 1$, $a_j \in A$ for $1 \leqslant j \leqslant n$. Let

$$a = (n+1)\left(1+\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right).$$

---

15) See Sikorski [1], § 5.

16) See van der Waerden [1], § 5 (Satz 8).

For every $x \epsilon \Re(A)$, $|x| \geqslant a$, we have:

$$|P(x)| = |x|^n \cdot \left|1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x^k}\right| \geqslant |x|^n \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|x|^k}\right) \geqslant$$
$$\geqslant |x|^n \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}\right) = \frac{|x|^n}{n+1} > 0.$$

Since $P(b)=0$, we infer that $|b|<a$. Consequently $b<a$, q. e. d.

It follows immediately from (i) that

(ii) *For every ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$ of elements of A the conditions:*

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} a_\xi = +\infty \quad in \quad A$$

and

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} a_\xi = +\infty \quad in \quad \Re(A)$$

are equivalent.

Lemma (ii) implies the following

Theorem I. *The ordered field $\Re(A)$ possesses the same character as the ordered field A.*

Let ε' be an arbitrary positive element of $\Re(A)$. By (i) there exists an element $\varepsilon \epsilon A$ such that $\frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon'}$, i. e. $0<\varepsilon<\varepsilon'$. Therefore:

(iii) *For every ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$ of elements of A and for every $a \epsilon A$ the conditions:*

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} a_\xi = a \quad in \quad A$$

and

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} a_\xi = a \quad in \quad \Re(A)$$

are equivalent.

3. The field $\mathfrak{A}(A)$. An algebraic field F is said to be *algebraically closed* [13]) provided every polynomial

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (n \geqslant 1, \ a \epsilon F)$$

is the product of linear factors

$$P(x) = (x - b_1) \dots (x - b_n)$$

where $b_j \in F$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

For every algebraic field A there exists exactly one algebraically closed field which is an algebraic extension of A [17]. This field will be denoted by $\mathfrak{A}(A)$. $\mathfrak{A}(A)$ is the least algebraically closed field containing A.

If A is an ordered field, $\mathfrak{A}(A)$ is the field which we obtain by adjoining the element $\sqrt{-1}$ to $\mathfrak{R}(A)$ [18]. Every element $a \in \mathfrak{A}(A)$ can be represented in the form $a = b + c\sqrt{-1}$, where $b, c \in \mathfrak{R}(A)$. The non-negative element $\sqrt{b^2 + c^2} \in \mathfrak{R}(A)$ will be denoted by $|a|$.

Suppose now that the ordered field A is of character ω_μ. Then the ordered field $\mathfrak{R}(A)$ is also of character ω_μ. We shall say that an ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$ of elements of $\mathfrak{A}(A)$ *converges* in $\mathfrak{A}(A)$ to an element $a \in \mathfrak{A}(A)$, in symbols

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} a_\xi = a \quad \text{in} \quad \mathfrak{A}(A),$$

if

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} |a_\xi - a| = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{R}(A).$$

Obviously

(i) *For every ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$ of elements of $\mathfrak{R}(A)$ and for every $a \in \mathfrak{R}(A)$ the conditions:*

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} a_\xi = a \quad \textit{in} \quad \mathfrak{R}(A)$$

and

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} a_\xi = a \quad \textit{in} \quad \mathfrak{A}(A)$$

are equivalent.

In the rest of this paper we shall always consider a fixed ordered field A of character ω_μ and ω_μ-sequences of elements of A, $\mathfrak{R}(A)$, and $\mathfrak{A}(A)$. By (i) and 2 (ii)–(iii) we may omit the words „in A", „in $\mathfrak{R}(A)$", and „in $\mathfrak{A}(A)$" after the symbols „$\lim\limits_{\xi < \omega_\mu} a_\xi = a$" and „$\lim\limits_{\xi < \omega_\mu} a_\xi = +\infty$" without causing any ambiguity.

[17]) See van der Waerden [1], p. 199.

[18]) See van der Waerden [1], p. 228 (Satz 3).

4. The resultant of two polynomials. Let

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x)$$
$$Q(x) = b_0 x_m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b^m = b_0(x - y_1) \cdot \ldots \cdot (x - y^m)$$

be two polynomials with coefficients $a_i \in \mathfrak{A}(A)$, $b_j \in \mathfrak{A}(A)$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. The resultant of these polynomials is the element

$$(P, Q) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (y_j - x_i) \in \mathfrak{A}(A).$$

It is well known that

(i) $(P, Q) = b_0^n P(y_1) \cdot \ldots \cdot P(y_m) = (-1)^{mn} a_0^n Q(x_1) \cdot \ldots \cdot Q(x_n)$.

We shall say that an ω_μ-sequence $\{P_\xi\}$ of polynomials

$$P_\xi(x) = a_{0,\xi} x^n + a_{1,\xi} x^{n-1} + \ldots + a_{n,\xi} \qquad (a_{i,\xi} \in \mathfrak{A}(A))$$

of degree $n > 0$ *converges* to a polynomial

$$P(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m \qquad (b_i \in \mathfrak{A}(A))$$

of degree $m > 0$ $(n = m + k, k \geqslant 0)$ if

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} a_{i,\xi} = 0 \quad \text{for} \quad 0 \leqslant i < k$$

and

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} a_{l+k,\xi} = b_l \quad \text{for} \quad 0 \leqslant i \leqslant m.$$

Obviously

(ii) *If* $\{P_\xi\}$ *converges to* P, *then for every* $a \in \mathfrak{A}(A)$

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} P_\xi(a) = P(a).$$

Hence

(iii) *If* $\{P_\xi\}$ *converges to* P, *then*

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} (P, P_\xi) = 0.$$

In fact, by (i)

$$(P, P_\xi) = (-1)^{mn} a_0^n P_\xi(y_1) \cdot \ldots \cdot P_\xi(y_m)$$

where $y_1, \ldots, y_m$ are the roots of the equation $P(x) = 0$, and

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} P_\xi(y_j) = 0$$

on account of (ii).

5. A fundamental lemma. *Let*

$$P_\xi(x) = a_{0,\xi}x^n + a_{1,\xi}x^{n-1} + \ldots + a_{n,\xi} = a_{0,\xi}(x - x_{1,\xi})\cdot\ldots\cdot(x - x_{n,\xi})$$

be an ω_μ-*sequence of polynomials of degree* $n = m + k > 0$ $(a_{j,\xi} \in \mathfrak{A}(A),\ k \geqslant 0,\ m \geqslant 0)$ *such that*

a) *the* ω_μ-*sequences* $\{x_{j,\xi}\}$ *where* $1 \leqslant j \leqslant m$ *are bounded;*

b) $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} |x_{j,\xi}| = +\infty$ *for* $m < j \leqslant n$;

c) *the* ω_μ-*sequence* $\{a_{k,\xi}\}$ *is convergent and* $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} a_{k,\xi} \neq 0$.

Then:

(i) $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} a_{j,\xi} = 0$ *for* $0 \leqslant j < k$;

(ii) *the* ω_μ-*sequences* $\{a_{j,\xi}\}$ *where* $k \leqslant j \leqslant n$ *are bounded;*

(iii) *if, in addition, the sequence* $\{P_\xi\}$ *converges to a polynomial*

$$P(x) = b_0(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_m)$$

(*of degree* m *on account of* c) *and* (i)), *then there exists an* ω_μ-*subsequence* $\{P_{\tau_\xi}\}$ *of* $\{P_\xi\}$ *such that*

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} x_{j,\tau_\xi} = x_j \quad \text{for} \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

after a suitable numbering of the roots $x_1, \ldots, x_m$ *of the polynomial* P.

Let $s_{j,\xi}$ denote (for $1 \leqslant j \leqslant n$) the j-th symmetric function of roots of the polynomial P_ξ. We have

$$a_{j,\xi} = (-1)^j a_{0,\xi} s_{j,\xi}.$$

Thus, if $k = 0$, (i) and (ii) are true. Suppose now $k > 0$. Let

$$p_\xi = x_{m+1,\xi}\cdot\ldots\cdot x_{n,\xi}.$$

By b) and a):

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} \frac{1}{p_\xi} = 0;$$

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} \frac{s_{j,\xi}}{p_\xi} = 0 \quad \text{for} \quad 1 \leqslant j < k;$$

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} \frac{s_{k,\xi}}{p_\xi} = 1.$$

The ω_μ-sequences $\frac{s_{j,\xi}}{p_\xi}$ where $k<j\leqslant n$ are bounded on account of a) and b).

Since

$$a_{0,\xi}=(-1)^k\cdot a_{k,\xi}\cdot\frac{1}{p_\xi}\cdot\frac{p_\xi}{s_{k,\xi}}$$

and

$$a_{j,\xi}=(-1)^{k-j}a_{k,\xi}\cdot\frac{s_{j,\xi}}{p_\xi}\cdot\frac{p_\xi}{s_{k,\xi}}\qquad(0<j\leqslant n)$$

the properties (i) and (ii) are proved.

The proof of (iii) is by induction on m. If $m=0$, (iii) is trivial. Suppose that (iii) is true for $m-1\geqslant 0$.

By c), $b_0=\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} a_{k,\xi}\neq 0$.

If $k=0$, let $z_\xi=a_{0,\xi}^m b_0^n$; if $k>0$, let

$$z_\xi=a_{0,\xi}^m b_0^n\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=m+1}^{n}(x_{j,\xi}-x_i)=b_0^n\cdot\left(\frac{a_{0,\xi}}{a_{k,\xi}}\right)^m\cdot a_{k,\xi}^m\cdot\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=m+1}^{n}(x_{j,\xi}-x_i)=$$
$$=(-1)^{km}b_0^n a_{k,\xi}^m\cdot\left(\frac{1}{s_{k,\xi}}\right)^m\cdot\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=m+1}^{n}(x_{j,\xi}-x_i).$$

If $k=0$, then $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} z_\xi=b_0^{m+n}\neq 0$. If $k>0$, then

$$\lim_{\xi<\omega_\mu}\frac{\prod\limits_{j=m+1}^{n}(x_{j,\xi}-x_i)}{s_{k,\xi}}=\lim_{\xi<\omega_\mu}\frac{\prod\limits_{j=m+1}^{n}(x_{j,\xi}-x_i)}{p_\xi}\cdot\lim_{\xi<\omega_\mu}\frac{p_\xi}{s_{k,\xi}}=1;$$

hence also

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} z_\xi=(-1)^{k\cdot m}\cdot b_0^n\cdot(\lim_{\xi<\omega_\mu} a_{k,\xi})^m\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\lim_{\xi<\omega_\mu}\frac{\prod\limits_{j=m+1}^{n}(x_{j,\xi}-x_i)}{s_{k,\xi}}\right)=$$
$$=(-1)^{km}\cdot b_0^{n+m}\neq 0.$$

Let

$$y_\xi=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x_{j,\xi}-x_i).$$

We have $(P,P_\xi)=y_\xi z_\xi$. Since $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu}(P,P_\xi)=0$ by 4 (iii), we infer that $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} y_\xi=0$. Consequently, there exists a pair

(i_0, j_0) of positive integers $(i_0 \leqslant m, j_0 \leqslant m)$ and an increasing sequence $\{\eta_\xi\}$ of ordinal numbers $<\omega_\mu$ such that $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} x_{j_0,\eta_\xi} = x_{i_0}$. We may suppose that $i_0 = j_0$. Thus we have

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} x_{j_0,\eta_\xi} = x_{j_0}.$$

Let now

$$P_{\eta_\xi} = (x - x_{j_0,\eta_\xi}) Q_\xi$$

and

$$P = (x - x_{j_0}) Q.$$

Q_ξ is a polynomial of degree $n-1$ and Q is a polynomial of degree $m-1$. It is easy to see [19]) that $\{Q_\xi\}$ and Q fulfil the assumptions of lemma (iii) where m is replaced by $m-1$. The roots of Q_ξ are $x_{1,\xi_\eta}, \ldots, x_{j_0-1,\xi_\eta}, x_{j_0+1,\xi_\eta}, \ldots, x_{m,\xi_\eta}, \ldots, x_{n,\xi_\eta}$; the roots of Q are $x_1, \ldots, x_{j_0-1}, x_{j_0+1}, \ldots, x_m$. By the induction assumption there exists an increasing ω_μ-sequence of ordinal numbers $\{\varrho_\xi\}$ such that

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} x_{j,\eta_{\varrho_\xi}} = x_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant m, j \neq j_0)$$

after a suitable numbering of the roots of P.

Consequently, the ω_μ-subsequence $\{P_{\tau_\xi}\}$ where $\tau_\xi = \eta_{\varrho_\xi}$ satisfies the condition (iii). Thus the fundamental lemma is proved.

6. The property (BW$_\mu$). Now we shall prove the following

Theorem II. *If an ordered field A (of character ω_μ) possesses the property* (BW$_\mu$), *the fields* $\mathfrak{R}(A)$ *and* $\mathfrak{A}(A)$ *possess also this property.*

Obviously, it is sufficient to prove that $\mathfrak{A}(A)$ possesses the property (BW$_\mu$).

The only ordered field of character $\omega_0 = \omega$ which possesses the property (BW$_0$) is the field of all real numbers. In the case $\mu = 0$ Theorem II is true.

Suppose that $\mu > 0$, and let $\{x_\xi\}$ be a bounded ω_μ-sequence of elements of $\mathfrak{A}(A)$. By definition of $\mathfrak{A}(A)$, x_ξ is a root of

---

[19]) It is sufficient to express coefficients of Q_ξ and Q by coefficients of P_ξ and P respectively.

a polynomial Q_ξ whose coefficients belong to A. Since $\mu > 0$ and ω_μ is regular, the sequence $\{Q_\xi\}$ contains an ω_μ-subsequence $\{Q_{\eta_\xi}\}$ such that all polynomials Q_{η_ξ} $(0 \leqslant \xi < \omega_\mu)$ have the same degree n. Let

$$y_{1,\xi}, y_{2,\xi}, \dots, y_{n,\xi}$$

be roots of Q_{η_ξ}. We may suppose that

(i) $$|y_{1,\xi}| \leqslant |y_{2,\xi}| \leqslant \dots \leqslant |y_{n,\xi}|.$$

Since x_{η_ξ} is a root of Q_{η_ξ}, there exists an integer h_ξ such that

$$x_{\eta_\xi} = y_{h_\xi, \xi}.$$

In the ω_μ-sequence $\{h_\xi\}$ a positive integer h appears $\aleph_\mu$-times, i. e. there exists an increasing ω_μ-sequence $\{\varrho_\xi\}$ of ordinal numbers $< \omega_\mu$ such that

$$x_{\eta_{\varrho_\xi}} = y_{h, \varrho_\xi}.$$

Let m denote the greatest integer $(\leqslant n)$ such that the ω_μ-sequence $\{y_{m,\varrho_\xi}\}$ is bounded, and let $k = n - m$. Obviously $h \leqslant m$. If $k = 0$, let $\tau_\xi = \xi$ for $\xi < \omega_\mu$. If $k > 0$, let τ_ξ be an increasing ω_μ-sequence or ordinal numbers $< \omega_\mu$ such that

(ii) $$\lim_{\xi < \omega_\mu} |y_{m+1, \varrho_{\tau_\xi}}| = +\infty.$$

By the definition of m such a sequence exists.

We have

$$Q_{\eta_{\varrho_{\tau_\xi}}}(x) = c_{0,\xi} x^n + c_{1,\xi} x^{n-1} + \dots + c_{n,\xi}$$

where $c_{i,\xi} \in A$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, $c_{0,\xi} \neq 0$. Since [20])

$$c_{k,\xi} = (-1)^k c_{0,\xi} s_{k,\xi}$$

and

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} |s_{k,\xi}| = \lim_{\xi < \omega_\mu} \frac{|s_{k,\xi}|}{|p_\xi|} \cdot \lim_{\xi < \omega_\mu} |p_\xi| = +\infty$$

---

[20]) $s_{k,\xi}$ denotes here the k-th symetric function of roots of $Q_{\eta_{\varrho_{\tau_\xi}}}$, and $p_\xi = y_{m+1, \varrho_{\tau_\xi}} \cdot \ldots \cdot y_{n, \varrho_{\tau_\xi}}$. See formulas on pp. 179—180.

we have $c_{k,\xi} \neq 0$ for sufficiently great ξ. Thus we may assume that always $c_{k,\xi} \neq 0$. Let

$$\text{(iii)} \qquad P_\xi(x) = \frac{Q_{\eta_{\varrho_{\tau_\xi}}}}{c_{k,\xi}} = a_{0,\xi}x^n + a_{1,\xi}x^{n-1} + \ldots + a_{n,\xi},$$

$$x_{j,\xi} = y_{\varrho_{\tau_\xi}} \quad \text{for} \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Obviously $a_{j,\xi} \in A$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ and

$$\text{(iv)} \qquad a_{k,\xi} = 1.$$

By the definition of the number m,

(v) the ω_μ-sequences $\{x_{j,\xi}\}$ where $1 \leqslant j \leqslant m$ are bounded.

On account of (i) and (ii)

$$\text{(vi)} \qquad \lim_{\xi<\omega_\mu} |x_{j,\xi}| = +\infty \quad \text{for} \quad m < j \leqslant n = k+m.$$

The conditions (iv), (v), and (vi) imply (see lemma 5 (i)–(ii)) that

$$\text{(vii)} \qquad \lim_{\xi<\omega_\mu} a_{j,\xi} = 0 \quad \text{for} \quad 0 \leqslant j < k$$

and that the ω_μ-sequences $\{a_{j,\xi}\}$ (where $k \leqslant j \leqslant n$) of elements of A are bounded. Since A possesses the property (BW_μ), there exists an increasing sequence $\{\lambda_\xi\}$ of ordinal numbers $<\omega_\mu$ such that the sequences $\{a_{j,\lambda_\xi}\}$ $(k \leqslant j \leqslant n)$ are convergent. Let

$$\text{(viii)} \qquad b_j = \lim_{\xi<\omega_\mu} a_{k+j,\lambda_\xi} \qquad (k < j \leqslant n)$$

and let

$$P(x) = x_m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m.$$

By (iv), (vii), and (viii) the ω_μ-sequence $\{P_{\lambda_\xi}\}$ of polynomials converges to the polynomial P. By (v), (vi), and (iv) the ω_μ-sequence $\{P_{\lambda_\xi}\}$ satisfies also the assumption a), b), c) of the fundamental lemma 5 (iii). Thus there exists an ω_μ-subsequence $\{P_{\lambda_{\sigma_\xi}}\}$ such that

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} x_{j,\lambda_{\sigma_\xi}} = x_j \text{ for } 1 \leqslant j \leqslant m$$

where $x_1, \ldots, x_m$ are the roots of $P(x)$. In particular

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} x_{h,\lambda_{\sigma_\xi}} = x_h .$$

The ω_μ-sequence $\{x_{h,\lambda_{\sigma_\xi}}\}$ is a convergent subsequence of the ω_μ-sequence $\{x_\xi\}$, q. e. d.

REFERENCES.

Hausdorff F. [1] *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig 1914.

— [2] *Mengenlehre.* Berlin-Leipzig 1927.

Sierpiński W. [1] *Leçons sur les nombres transfinis,* Paris 1928.

Sikorski R. [1] *On an ordered algeoraic field,* to appear in Comptes Rendus de la Société des Sciences et de Lettres de Varsovie, Classe III, 1948.

Van der Waerden B. L. [1] *Moderne algebra I,* Berlin 1930.

STATIONARY FLOWS IN HETEROGENEOUSLY UNISOTROPIC MEDIUMS

By Jerzy Litwiniszyn (Kraków)

§ 1. The structure of many phenomena is described by the following law

$$v = \varkappa \operatorname{grad} p. \tag{1}$$

The laws of heat transmission in the solid substances, flow of direct current, flow of non-compressible fluids in porous mediums (H. Darcy) are the examples of the above given law.

In the mentioned cases v should be interpreted as the vector of heat transmission, vector of strength of the electric field or, in case of the flow of non-compressible fluids in the porous mediums as the filtrating velocity vector.

Respectively p should be interpreted as a function that defines the scalar field of temperatures, electric potential or value of pressure drop, due to the flow resistance in the porous medium.

The coefficient $\varkappa$ in equation (1) characterizes the medium, in which the flow takes place. Particularly if we consider the flow of fluids in the porous mediums, the coefficient $\varkappa$ is the *coefficient of permeability*.

In case of an isotropic medium the coefficient $\varkappa$ is a scalar function of the independent variable coordinates in space.

For the unisotropic mediums the values that characterize these mediums depend not only on the space coordinates but also on the direction considered. To describe the properties of such a medium a function defining the tensor field instead of the function defining the scalar field should be introduced.

If $\varkappa$ is a scalar function then equation (1) may be interpreted as a certain particular example of transformation of the vector field (grad p) into the parallel vector vield $\boldsymbol{v}$.

In case of the unisotropic medium equation (1) may be generalized if the scalar coefficient $\varkappa$ is replaced by the tensor coefficient A^{ij}. In this case we shall obtain

$$v^j = A^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^i} \tag{2}$$

where v^j is the component of the contravariant vector of velocity and A^{ij} the component of a contravariant tensor of the second order that describes the unisotropy of medium. The double appearance of the index i on the right side of equation (2) denotes according to EINSTEIN's convention, the summation in respect to that index. For three dimensional flows $i, j = 1, 2, 3$.

Equation (2) may be interpreted as the linear transformation of the covariant vector field $\frac{\partial p}{\partial x^i}$ into the contravariant vector field v^j.

In the particular case of the isotropic medium

$$A^{ij} = \varkappa\delta^{ij}$$

where

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1 \text{ for } i = j \\ 0 \text{ for } i \neq j \end{cases} \qquad \text{(Kronecker's symbol).}$$

For the homogeneously isotropic mediums $\varkappa = \text{const}$.

In case of stationary flows in the sourceless regions

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

thus

$$\nabla_j v^j = 0.$$

Substituting the value from equation (2) into the last equation and using the formula for the derivative of the product of two tensors we obtain:

$$\nabla_j\left(A^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial p}{\partial x^i}\left(\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk}A^{kj} + \Gamma^j_{jk}A^{ik}\right) + \\ + A^{ij}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^i\,\partial x^j} - \frac{\partial p}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}\right) = 0, \tag{4}$$

where Γ denotes the Christoffel's symbol of the second kind i. e. a function of the metric tensor.

In the particular case of the Euclidean space as well as rectangular systems the Christoffel's symbols are identically equal to zero and equation (4) will assume the following form:

(5) $$\frac{\partial p}{\partial x^i}\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^j}+A^{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x^i\,\partial x^j}=0.$$

For the isotropic mediums according to equation (3) we get

(5 a) $$\frac{\partial p}{\partial x^i}\frac{\partial(\varkappa\delta^{ij})}{\partial x^j}+\varkappa\delta^{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x^i\,\partial x^j}=0.$$

For the isotropic homogeneous mediums we obtain the Laplace's equation:

$$\Delta p=0.$$

§ 2. Let us consider in particular a certain plane region (R) and let

(6) $$x^1=x \text{ and } x^2=y.$$

The region (R) is defined for $0\leqslant x<l$ and $y\geqslant 0$ (see fig. 1).

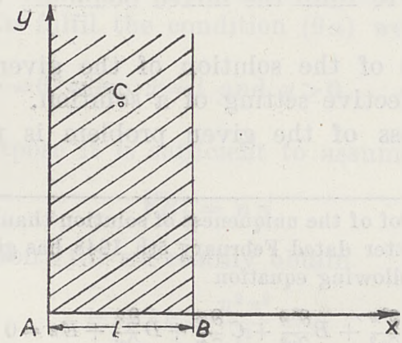

Fig. 1

In this region we shall define the value $\varkappa$ which is described by the following function:

(7) $$\varkappa=De^{-\beta y}$$

where D as well as β are constant values and the value of β is not smaller than zero. Thus

$$\beta \geqslant 0. \tag{8}$$

Suppose, that in the considered region (R) there exists a two dimensional flow defined by the following boundary conditions:

(9 a) when $y=0$ and $0 \leqslant x \leqslant l$ then $p=\omega x+\delta$

(9 b) when $x=0$, $x=l$ and $y>0$ then $v_x = \varkappa \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$
i. e.: $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ ω, δ being two constants.

These are *mixed conditions* because for a certain part of the bound of region (R) they give the value of the function p itself and for the remaining part of the bound they give the value of its normal derivative.

Now we are searching for the solution of equation (5a). This equation (5a) owing to equations (6) and (7) will assume the following form:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{10}$$

The solution has to fulfil the mixed boundary conditions (9a) and (9b).

The existence of the solution of the given problem can be proved by effective setting of a solution.

The uniqueness of the given problem is not considered in this article [1]).

---

[1]) I gain the proof of the uniqueness of solution thanks to Prof. M. Picone, who in the letter dated February 5th 1948 has given me the terms of solution of the following equation

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + C\frac{\partial z}{\partial x} + D\frac{\partial z}{\partial y} + Ez = 0$$

$(A, B, C, D, E$ const)

for boundary conditions determined by equations (9a) and (9b).

In general the above problem has more than one solution. In the particular case of the equation (10) the problem has only one solution. (See the following paper of A. Ghizzetti „Flow in a not homogeneous and anisotropic medium").

§ 3. Let us assume the particular integral of equation (10) in form

(11) $$p = e^{-ky} f(x),$$

where k is an arbitrary parameter.

Substituting the value from equation (11) into equation (10) we get the ordinary differential linear equation

(12) $$f''(x) + B f(x) = 0,$$

where

(13) $$B = k^2 + \beta k.$$

Assuming the particular integrals in the form

(14) $$f_1 = a \cos \sqrt{B} x, \qquad f_2 = b \sin \sqrt{B} x,$$

we obtain from equation (11)

(15) $$p_1 = a e^{-ky} \cos \sqrt{B} x \quad \text{resp.} \quad p_2 = b e^{-ky} \sin \sqrt{B} x$$

as the particular integrals of equation (10).

Now we take into consideration the integral p_1 and then

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -a \sqrt{B} e^{-ky} \sin \sqrt{B} x.$$

It results from the last formula that when $x = 0$ and $y > 0$ then $\frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$. To fulfil the condition (9a) we give to B such values that $\frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$ when $x = l$ and $y > 0$.

For this purpose it is sufficient to assume

(16) $$\sqrt{B} l = n \pi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

From equation (13) we readily obtain

(17) $$k^2 + \beta k - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = 0.$$

The last equation possesses two sequences of roots (for $n = 1, 2, \ldots$)

(18 a) $$k_1, k_2, k_3, \ldots$$

(18 b) $$k_1', k_2', k_3', \ldots$$

where the first sequence k_n is an increasing sequence with all positive terms and the sequence k_n' is a decreasing sequence with all negative terms.

The terms of sequences (18a) and (18b) by help of equation (13) define the so-called eigenvalues B_n. The eigenvalues B_n define the so-called sequence of eigenfunctions by help of formula (14). Thus relatively to the eigenfunctions sequence we obtain the sequence of particular integrals that fulfil the boundary conditions (9b) as well as equation (10) in form:

$$p_n = a_n e^{-k_n y} \cos \sqrt{B_n}\, x \tag{19}$$

where a_n is an arbitrary constant.

As the equation (10) is homogeneous it is fulfilled by the sum of particular integrals:

$$p = \delta + \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k_n y} \cos \sqrt{B_n}\, x \tag{20}$$

where δ and a_0 are constant values fulfilling equation (10). The integral (20) fulfils equation (10) as well as the boundary conditions (9b).

Now the arbitrary coefficients a_0 and a_n should be chosen in such a way that the boundary conditions (9a) could be fulfilled. Therefore according to equation (9a)

$$\omega x = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \sqrt{B_n}\, x. \tag{21}$$

The coefficients of development of function ωx in the Fourier's series in which there appear cosine terms only ought to be computed now. As it is known only the even functions develop into such a series. Let us therefore accept the even function $\varphi(x)$ in form

$$\begin{cases} \varphi(x) = -\omega x & \text{for } -l \leqslant x \leqslant 0 \\ \varphi(x) = \omega x & \text{for } 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{22}$$

Thus in the considered interval $0 \leqslant x \leqslant l$ the function $\varphi(x)$ assumes the values of the considered function ωx [2]).

---

[2]) This problem may be generalized for other forms of functions $\varphi(x)$.

For the even function $\varphi(x)$ defined in the interval $-l \leqslant x \leqslant l$ the coefficients a_0 and a_n are defined by the following equations:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{+l} \varphi(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{+l} \varphi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

After substituting the values from equation (22) into the last formulae we get

$$\begin{aligned} a_0 &= \omega l \\ a_{2j-1} &= -\frac{4\omega l}{\pi^2(2j-1)^2} \qquad (j=1,2,3,\ldots). \\ a_{2j} &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Now putting the values B_i from equation (16) into (20) and the value of coefficients (a_0) and (a_n) from equations (23) we obtain the solution in the following form:

$$p = \delta + \frac{1}{2}\,\omega l - \frac{4\omega l}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{(2j-1)\pi}{l}x}{(2j-1)^2}\, e^{-k_{2j-1}y}. \tag{24}$$

The series appearing in (24) may be put in the form $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(x)\, b_\nu(y)$.

In the whole considered intervall $0 \leqslant x < l$ the series $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(x)$ is uniformly convergent. For fixed values of y the sequence $b_\nu(y)$ is monotonic.

For the values k_ν of the sequence (18a) for any $y \geqslant 0$ as well as for the arbitrary ν, $|b_\nu(y)| \leqslant M$, where M is a finite number. It results from the above using for example the Abel's criterion of convergence that the series (24) which defines the solution is a uniformly convergent series in the considered region (R).

The formula (24) allows calculating the components of velocity v_x and v_y. Respecting equations (3) and (7) and differentiating one term after another we shall obtain then according to equation (2):

$$v_x = \varkappa \frac{\partial p}{\partial x} = D e^{-\beta y} \frac{4\omega l}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\pi}{l(2j-1)} \sin\left[\frac{(2j-1)\pi}{l} x\right] e^{-k_{2j-1} y}$$

(25)

$$v_y = \varkappa \frac{\partial p}{\partial y} = D e^{-\beta y} \frac{4\omega l}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_{2j-1}}{(2j-1)^2} \cos\left[\frac{(2j-1)\pi}{l} x\right] e^{-k_{2j-1} y}.$$

As the obtained series in equation (25) are in the region $0 \leqslant x \leqslant l$ and $y > 0$ uniformly convergent therefore the functions v_x and v_y given by them represent the partial derivatives of function p in this region.

§ 4. In the particular case when $\beta = 0$ it appears from the formula (7) that $\varkappa = D = \text{const}$. This is valid for the homogeneously isotropic mediums. Equation (10) assumes then the form of the Laplace's equation:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{26}$$

The solution of this equation for the given boundary conditions (9a) and (9b) is enclosed in formula (24) where for

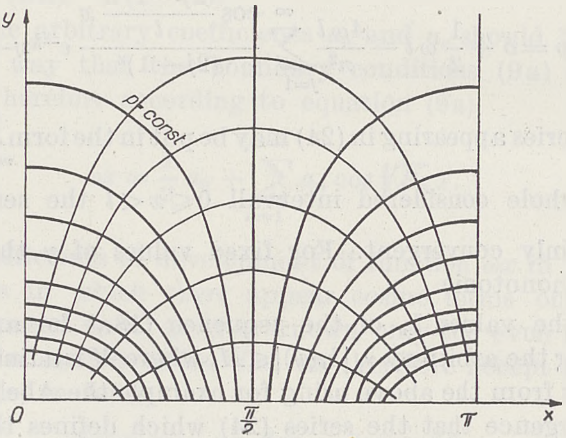

Fig. 2

$B = 0$ we shall obtain two numerical sequences of the values k_n from the equation (17):

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \qquad k_n' = -\frac{n\pi}{l} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

The first of these sequences corresponds to the uniformly convergent series in the region (R) thus

$$p = \delta + \frac{1}{2}\,\omega\, l - \frac{4\omega\, l}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(2j-1)\frac{\pi}{l}x}{(2j-1)^2}\, e^{-(2j-1)\frac{\pi}{l}y}. \tag{24 a}$$

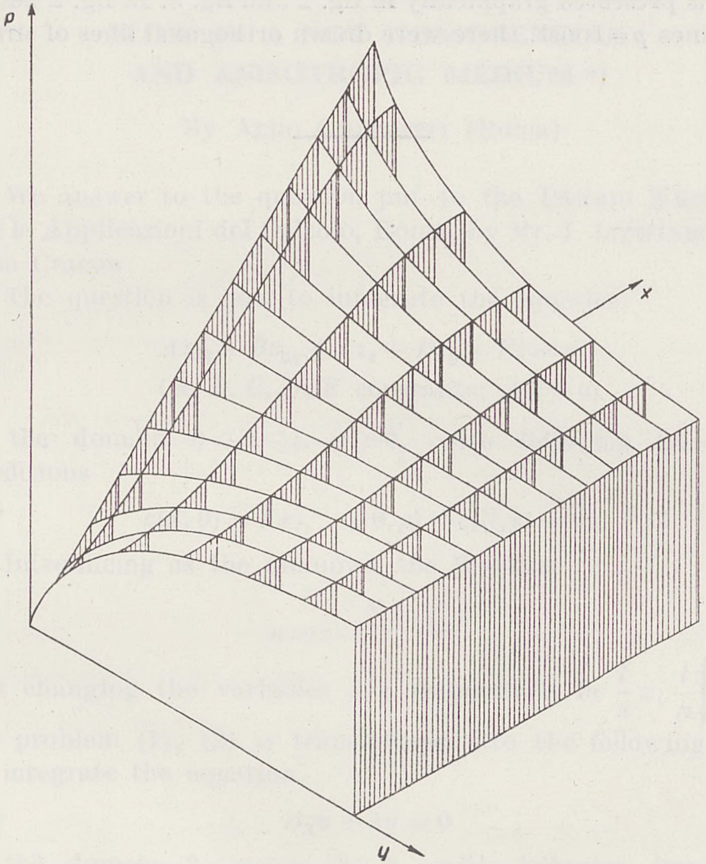

Fig. 3

This series represents the solution of equation (26) for the given boundary conditions (9a) and (9b).

Assuming in particular that $l=\pi$ and $\omega=1$ we shall obtain from (24a)

$$p=\delta+\frac{1}{2}\pi-\frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(2j-1)x}{(2j-1)^2}\,e^{-(2j-1)y}.$$

This solution for the given boundary conditions (9a) and (9b) is presented graphically in fig. 2 and fig. 3. In fig. 2 besides the lines $p=\text{const.}$ there were drawn orthogonal lines of stream flow.

FLOW IN A NOT HOMOGENEOUS AND ANISOTROPIC MEDIUM *)

By Aldo Ghizzetti (Roma)

We answer to the question put to the Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma, by Mr. J. Litwiniszyn [1]) from Cracow.

The question is how to integrate the equation:

$$
\begin{gathered}
A z_{xx} + B z_{yy} + C z_x + D z_y + E z = 0 \\
(A, B, C, D, E \text{ constants; } AB > 0)
\end{gathered}
\tag{1}
$$

in the domain $0 \leqslant x \leqslant l$, $y \geqslant 0$, with following boundary conditions

$$
z(x, 0) = f(x), \quad z_x(0, y) = z_x(l, y) = 0. \tag{2}
$$

Introducing as the unknown the function

$$
u = z \cdot e^{\frac{C}{2A} x + \frac{D}{2B} y}
$$

and changing the variables x, y respectively in $\frac{l}{\pi} x, \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{B}{A}}\, y$ the problem (1), (2) is transformed into the following one: to integrate the equation

$$
\Delta_2 u + \lambda u = 0 \tag{1'}
$$

in the domain $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $y \geqslant 0$, with following boundary conditions

$$
\begin{gathered}
u(x, 0) = g(x), \\
u_x(0, y) - a u(0, y) = u_x(\pi, y) - a u(\pi, y) = 0.
\end{gathered}
\tag{2'}
$$

---

*) This paper has been worked on in the Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma.

[1]) See the paper inserted in the same volume of these annals.

In (1′), (2′) we put:

$$\lambda = \frac{l^2}{\pi^2}\frac{1}{A}\left(E - \frac{C^2}{4A} - \frac{D^2}{4B}\right); \quad \alpha = \frac{l}{2\pi}\frac{C}{A},$$
(3)
$$g(x) = e^{\frac{l}{2\pi}\cdot\frac{C}{A}\cdot x}\cdot f\left(\frac{l}{\pi}x\right).$$

Let us consider now the problem (1′), (2′), observing that to each solution $u(x,y)$ corresponds the following solution

(4) $$z(x,y) = e^{-\frac{C}{2A}x - \frac{D}{2B}y}\, u\left(\frac{\pi}{l}x, \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{A}{B}}\,y\right)$$

of the original problem (1), (2).

To study the problem (1′), (2′) let us consider the following *transforms* of the solution $u(x,y)$

(5) $$u_k(y) = \int_0^\pi u(x,y)\,\varphi_k(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

where $\varphi_k(x)$ are the „eigensolutions" of the following ordinary problem

(6) $$\varphi''(x) + \mu\varphi(x) = 0, \quad \varphi'(0) - \alpha\varphi(0) = \varphi'(\pi) - \alpha\varphi(\pi) = 0.$$

We find immediately that the eigenvalues of the parameter μ are the roots of the equation $(\mu + \alpha^2)\sin\pi\sqrt{\mu} = 0$ and hence are

(7) $$\mu_0 = -\alpha^2; \quad \mu_k = k^2; \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$ [2].

The corresponding eigensolutions are

(8) $$\varphi_0(x) = e^{\alpha x}, \quad \varphi_k(x) = \alpha\sin kx + k\cos kx \ \ (k = 1, 2, \ldots).$$

The (8) form a complete system of orthogonal functions in the interval $(0,\pi)$ [3] and we have

(9) $$\int_0^\pi \varphi_0^2(x)\,dx = \frac{e^{2\pi\alpha} - 1}{2\alpha}\,{}^{4)}; \quad \int_0^\pi \varphi_k^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + k^2);$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

---

[2]) $k = 0$ is excluded, because if $\alpha \neq 0$, zero is not an eigenvalue of μ; but it is if $\alpha = 0$, the value $\mu = 0$ however being already considered in μ_0.

[3]) We note that when $\alpha = 0$, we have the usual system $\{1, \cos x, \cos 2x \ldots\}$.

[4]) We say, once for all, that for $\frac{e^{2\pi\alpha} - 1}{2\alpha}$ must be substituted by its limit value π when $\alpha = 0$.

Let us consider again equation (1′) whence follows

$$\int_0^\pi (u_{xx} + u_{yy} + \lambda u)\varphi_k(x)\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

or

$$\left[u_x\varphi_k - u\varphi_k'\right]_0^\pi + \int_0^\pi u\varphi_k''\,dx + \frac{d^2}{dy^2}\int_0^\pi u\varphi_k\,dx + \lambda\int_0^\pi u\varphi_k\,dx = 0.$$

But as from (2′), (6), in points $x=0$ and $x=\pi$ results $u_x = \alpha u$, $\varphi_k' = \alpha\varphi_k$, we have

$$\left[u_x\varphi_k - u\varphi_k'\right]_0^\pi = 0;$$

moreover, from (6) is $\varphi_k'' = -\mu_k\varphi_k$ and therefore, reminding (5), we conclude, that for each solution $u(x, y)$ of problem (1′), (2′), the transforms $u_k(y)$ must satisfy the following ordinary differential equation of 2nd order

$$\text{(10)} \qquad \frac{d^2u_k}{dy^2} + (\lambda - \mu_k)u_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Moreover, from the first in (2′) must to be

$$\text{(11)} \qquad u_k(0) = \gamma_k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

where we put

$$\text{(12)} \qquad \gamma_k = \int_0^\pi g(x)\varphi_k(x)\,dx.$$

We consider (10) and we notice that, from (7), with increasing k, the quantities $\lambda - \mu_k$ are ultimately negative. We define ν, as the first index making $\lambda - \mu_k \leqslant 0$ (It may be $\nu = 0, 1, 2, \dots$).

Then from (10), (11) follows:

$$\text{(13)} \quad \left|\begin{array}{ll} u_k(y) = \gamma_k \cos\sqrt{\lambda - \mu_k}\,y + c_k \sin\sqrt{\lambda - \mu_k}\,y & (k = 0, 1, \dots, \nu - 1)\,^{5)}, \\ u_\nu(y)\left\{\begin{array}{l} = \gamma_\nu e^{-\sqrt{\mu_\nu - \lambda}\,y} + c_\nu \sinh\sqrt{\mu_\nu - \lambda}\,y \\ = \gamma_\nu + c_\nu y \end{array}\right. & \begin{array}{l} (\text{if } \lambda - \mu_\nu < 0) \\ (\text{if } \lambda - \mu_\nu = 0) \end{array} \\ u_k(y) = \gamma_k e^{-\sqrt{\mu_k - \lambda}\cdot y} + c_k \sinh(\sqrt{\mu_k - \lambda}\cdot y) & (k = \nu + 1, \nu + 2, \dots) \end{array}\right.$$

where $c_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ denote arbitrary constants.

---

[5]) If $\nu = 0$, these formulae are missing.

(13) show that the conditions of the problem (1′), (2′) are not sufficient to determine the solution $u(x,y)$, because the Fourier coordinates $u_k(y)$ of $u(x,y)$ in respect of the complete system $\{\varphi_k(x)\}$ are not uniquely determined.

On the contrary (13) show that the problem admits an *infinite number* of (real) eigensolutions:

$$(14)\qquad U_k(x,y)\begin{cases} =\varphi_k(x)\sin\sqrt{\lambda-\mu_k}\,y & (k=0,1,\dots,\nu-1)\\ =\varphi_\nu(x)\sinh\sqrt{\mu_\nu-\lambda}\,y & (k=\nu,\ \lambda-\mu_k<0)\end{cases}$$

$$(14')\qquad U_k(x,y)\begin{cases} =\varphi_\nu(x)\cdot y & (k=\nu,\ \lambda-\mu_\nu=0)\\ =\varphi_k(x)\sinh\sqrt{\mu_k-\lambda}\,y & (k=\nu+1,\ \nu+2,\dots).\end{cases}$$

To render the problem a determined one, we must impose on $u(x,y)$ another condition e. g. a condition for $y\to+\infty$.

We assume e. g. that

$$(15)\qquad \left|\begin{array}{ll} \lim\limits_{y\to+\infty} e^{-\sqrt{\mu_\nu-\lambda}\,y}\,u(x,y)=0 & \qquad (\text{if }\ \lambda-\mu_\nu<0)\\ \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{u(x,y)}{y}=0 & \qquad (\text{if }\ \lambda-\mu_\nu=0)\end{array}\right.$$

(uniformly in the interval $0\leqslant x\leqslant\pi$).

Then from (15) immediately follows that ought to be

$$\left|\begin{array}{ll} \lim\limits_{y\to+\infty} e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda}\,y}\,u_k(y)=0 & \qquad (\text{if }\ \lambda-\mu_\nu<0)\\ \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{u_k(y)}{y}=0 & \qquad (\text{if }\ \lambda-\mu_\nu=0)\end{array}\right.$$

and we recognize at once, by means of (13) that the last conditions may be fulfilled only if one assumes $c_\nu=c_{\nu+1}=c_{\nu+2}\dots=0$ leaving still $c_0,c_1,\dots,c_{\nu-1}$ quite arbitrary.

Thus, imposing, farther on (1′), (2′) condition (15) *we obtain the theorem of uniqueness only if* $\nu=0$, *that is if*

$$\lambda-\mu_0=\lambda+a^2<0.$$

Instead of this if $\nu>0$, *that is* $\lambda+a^2>0$, *even with onditi*on (15) *we cannot obtain the theorem of uniqueness; all the solutions,*

may be obtained adding to a fixed one, if a solution exists, an arbitrary lineary combination of the ν *eigensolutions* $U_0(x,y)$, $U_1(x,y),\ldots,U_{\nu-1}(x,y)$ *defined by* (14).

As to the existence of a solution *satisfying* (15) it is to be referred, in every case, to the formula

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k(y)}{\int\limits_0^{\pi}\varphi_k^2(x)\,dx}\cdot\varphi_k(x)$$

which, taking into consideration (7), (8), (9), (12), (13), *in case* $\nu=0$ *that is* $\lambda+\alpha^2\leqslant 0$ we write

$$\begin{aligned}u(x,y)&=p_0\,e^{\alpha x-\sqrt{-\lambda-\alpha^2}\,y}+\\&+\sum_{k=1}^{\infty}p_k\,e^{-\sqrt{k^2-\lambda}\,y}(\alpha\sin kx+k\cos kx)\end{aligned}\tag{16}$$

putting

$$\begin{gathered}p_0=\frac{2\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\cdot\int\limits_0^{\pi}g(x)\,e^{\alpha x}\,dx,\\ p_k=\frac{2}{\pi(\alpha^2+k^2)}\int\limits_0^{\pi}g(x)\,(\alpha\sin kx+k\cos kx)\,dx\\ (k=1,2,\ldots).\end{gathered}\tag{16'}$$

Instead of this *if* $\nu>0$ that is $\lambda+\alpha^2>0$, we have

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\,p_0e^{\alpha x}\cos\sqrt{\lambda+\alpha^2}\,y+\sum_{k=1}^{\nu-1}p_k(\alpha\sin kx+k\cos kx)\cos\sqrt{\lambda-k^2}\,y\\&+\sum_{k=\nu}^{\infty}p_k e^{-\sqrt{k^2-\lambda}\,y}(\alpha\sin kx+k\cos kx)+\\&+q_0\,e^{\alpha x}\sin\sqrt{\lambda+\alpha^2}\,y+\sum_{k=1}^{\nu-1}q_k(\alpha\sin kx+k\cos kx)\sin\sqrt{\lambda-k^2}\,y\end{aligned}\tag{17}$$

where p_k are given in (16'), while $q_0,q_1,\ldots,q_{\nu-1}$ are *arbitrary constants.*

Regarding the problem (1′), (2′) we may come to the following conclusions.

The problem is in general not determined, it has infinite eigensolutions (14).

Let us consider the sequence

$$\varrho_0 = \lambda + a^2, \quad \varrho_1 = \lambda - 1^2, \quad \varrho_2 = \lambda - 2^2, \ldots, \quad \varrho_k = \lambda - k^2, \ldots$$

and let ϱ_ν be the first not positive term.

Imposing on $u(x,y)$ the last condition:

$$\lim_{y\to+\infty} [e^{-\sqrt{-\varrho_\nu}\, y} u(x,y)] = 0 \quad (\text{if } \varrho_\nu < 0); \quad \lim_{y\to+\infty} \frac{u(x,y)}{y} = 0 \quad (\text{if } \varrho_\nu = 0)$$

(uniformly in the interval $0 \leq x \leq \pi$) the problem becomes determined if $\nu = 0$ and its solution is to be referred to formula (16); it is not determined if $\nu > 0$, as in this case there are ν eigensolutions linearly independent, and its solutions are to be referred to formula (17).

Finally we remind of the transition to the original problem (1), (2) as being accomplished by means of (3), (4) [6].

---

[6]) Further considerations on the present question may be found in the following papers: A. Ghizzetti, *Su un particolare problema misto per una equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti* (Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, s. VIII, vol. V, p. 344—348, 1948); A. Purificato, *Su un particolare sistema di funzioni ortogonali e su un procedimento di sommazione analogo a quello di Poisson* (ibidem, p. 348—355).

ON AN OSCILLATORY PROPERTY OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS

By Jacek Szarski (Kraków)

The theorem this note deals with was suggested by a paper of Mr. A. Wintner[1]). A theorem of quantitative character contained in that paper appears to be a particular case of the following more general theorem of qualitative character.

We consider a system of ordinary differential equations:

$$\dot{y}^i = f^i(t, y^1, \dots, y^n), \quad (i = 1, \dots, n). \tag{1}$$

The functions $f^i(t, y^1, \dots, y^n)$ are supposed to be continuous for arbitrary[2]) $y^1, \dots, y^n$, and:

$$a < t < b. \tag{2}$$

Let $f^i(t, y^1, \dots, y^n)$ satisfy the following conditions of monotony.

If

$$y^i \leqslant \overline{y}^i, \ (i = 1, \dots, k); \quad y^i \geqslant \overline{y}^i, \ (i = k+1, \dots, n) \tag{3}$$

---

[1]) A. Wintner: *Successive approximations and a property of the exponential series*, Matematisk Tidskrift, Arg. 1948, Hefte 1, p. 22—24.

[2]) The continuity of f^i for arbitrary $y^1, \dots, y^n$ is not essential for the validity of the subsequent theorem. We make this assumption only to assure the existence of successive approximations on the whole interval (2).

then:

(4) $$f^i(t, y^1, \dots, y^n) \geqslant f^i(t, \overline{y}^1, \dots, \overline{y}^n), \quad (i = 1, \dots, k),$$

(5) $$f^i(t, y^1, \dots, y^n) \leqslant f^i(t, \overline{y}^1, \dots, \overline{y}^n), \quad (i = k+1, \dots, n),$$

where k is a fixed integer satisfying the inequality $0 \leqslant k \leqslant n$.

Let

(6) $$y^i = y^i(t), \quad (i = 1, \dots, n),$$

be a solution path of (1) passing through the point $(\mathring{t}, \mathring{y}^1, \dots, \mathring{y}^n)$ and existing on the interval:

(7) $$\mathring{t} \leqslant t < b.$$

Then we have on the interval (7):

(8) $$y^i(t) = \mathring{y}^i + \int_{\mathring{t}}^{t} f^i(t, y^1(t), \dots, y^n(t))\, dt, \quad (i = 1, \dots, n).$$

The well known Picard' formulas for the successive approximations to the solution (6) are:

(9) $$y^i_{\nu+1}(t) = \mathring{y}^i + \int_{\mathring{t}}^{t} f^i(t, y^1_\nu(t), \dots, y^n_\nu(t))\, dt, \quad (i = 1, \dots, n;\ \nu = 0, 1, \dots).$$

where the initial approximation:

(10) $$y^i = y^i_0(t), \quad (i = 1, \dots, n)$$

may be any continuous curve.

We shall prove the following theorem.

If for the initial curve (10) *the differences:*

(11) $$y^i_0(t) - y^i(t), \quad (i = 1, \dots, k)$$

are of the same constant sign on the interval (7)[3]), *while the differences*:

$$(12)\qquad y_0^i(t)-y^i(t), \quad (i=k+1,\ldots,n),$$

are of the opposite sign to that of (11), *then the sign of*:

$$(13)\qquad y_\nu^i(t)-y^i(t), \quad (i=1,\ldots,k)$$

is equal or opposite to that of (11) *and the sign of*:

$$(14)\qquad y_\nu^i(t)-y^i(t), \quad (i=k+1,\ldots,n)$$

is equal or opposite to that of (12) *on the interval* (7), *according as* ν *be even or uneven.*

Proof. By (8) and (9) we have:

$$(15)\quad y_{\nu+1}^i(t)-y^i(t)=\int_{\mathring{t}}^{t}[f^i(t,y_\nu^1(t),\ldots,y_\nu^n(t))-f^i(t,y^1(t),\ldots,y^n(t))]\,dt$$

$$(i=1,\ldots,n;\ \nu=0,1,\ldots).$$

If for a ν the differences (13) are of the same constant sign, while the differences (14) are of the opposite sign to that of (13), then by (3) and (4), it follows from (15) that the sign of:

$$(16)\qquad y_{\nu+1}^i(t)-y^i(t), \quad (i=1,\ldots,k)$$

is opposite to that of (13) on the interval (7). By the same argument and by (3) and (5) the sign of:

$$(17)\qquad y_{\nu+1}^i(t)-y^i(t), \quad (i=k+1,\ldots,n)$$

is opposite to that of (14).

Following this remark and by the hypothesis concerning the sign of differences (11) and (12) the proof is completed by induction.

Corollary. It is clear by (15), that *if the weak inequalities* (3), (4) *and* (5) *are replaced by strong ones, while the differences*

[3]) This means that on the interval (7) either $y_0^i(t)-y^i(t)\geqslant 0$ or $y_0^i(t)-y^i(t)\leqslant 0$ for $i=1,\ldots,k$.

(11) and (12) are supposed to satisfy the hypothesis of the theorem and to be never zero on the open interval:

$$\overset{\circ}{t} < t < b, \tag{18}$$

then the differences (13) and (14) are different from zero and alternately positive or negative on the interval (18).

Remark. Mr. A. WINTNER considers in his paper[4]) the differential equation of the second order:

$$x'' + f(t)x = 0, \tag{19}$$

where $f(t)$ is supposed to be continuous and negative for $0 \leqslant t < +\infty$.

Mr. WINTNER's theorem may be formulated (in a somewhat modified form) as follows.

If a solution $x(t)$ of (19) is positive and:

$$x(0) - x(t) > 0, \tag{20}$$

on the interval:

$$0 < t < +\infty, \tag{21}$$

then the differences:

$$x_\nu(t) - x(t) \tag{22}$$

are positive for ν even and negative for ν uneven on the interval (21), where $x_\nu(t)$ is the ν-th successive approximation to $x(t)$ given by the formulas:

$$x_0(t) = x(0), \quad x_1(t) = x(0) + x'(0)t, \tag{23}$$

$$x_\nu(t) = x(0) + x'(0)t - \int_0^t (t-s) f(s) x_{\nu-2}(s)\, ds, \quad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{24}$$

This theorem is a consequence of the one just proved by us.

---

[4]) Cf. loc. cit.

Indeed, by putting $y^1 = x$, $y^2 = x'$, the equation (19) is transformed into the system:

$$\dot{y}^1 = y^2 \tag{25}$$
$$\dot{y}^2 = -f(t)\, y^1.$$

If

$$y^i = y^i(t), \quad (i = 1, 2) \tag{26}$$

is the solution path of (25) such that:

$$y^1(0) = x(0), \quad y^2(0) = x'(0) \tag{27}$$

then:

$$y^1(t) \equiv x(t). \tag{28}$$

For the successive approximations to the solution (26), given by Picard's formulas with the initial approximation:

$$y_0^1(t) = y^1(0), \quad y_0^2(t) = y^2(0) \tag{29}$$

we have:

$$y_\nu^1(t) \equiv x_\nu(t), \quad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{30}$$

The function $f(t)$ being continuous and negative the system (25) satisfies the hypothesis (4) and (5) of monotony (with strong inequalities). By (20), (27), (28) and (29) we have:

$$y_0^1(t) - y^1(t) > 0 \tag{31}$$

on the interval (21). By the second equation (25) we have, $y^1(t)$ being positive:

$$\dot{y}^2(t) > 0 \tag{32}$$

whence it follows by (29) that:

$$y_0^2(t) - y^2(t) < 0, \tag{33}$$

on the interval (21). Now the corollary of our theorem implies that:

$$y_\nu^1(t) - y^1(t) \tag{34}$$

is positive for ν even and negative for ν uneven on the interval (21), what completes the proof of Mr. WINTNER's theorem, since the differences (34) are, by (28) and (30), equal to the differences (22).

FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE BOUNDED ON SEQUENCES OF POINTS

By J. Korevaar (Amsterdam)

CONTENTS

§ 1. *Introduction and results.*

A function $f(z)$ defined on a set E extending to infinity is said to be of exponential type on E if there are constants A and B such that

$$|f(z)| < Be^{A|z|} \tag{1.1}$$

for all $z \in E$. An entire function $f(z)$ is said to be of exponential type if (for some A and B) (1.1) is valid for all z.

If $f(z)$ is of exponential type on E,

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \{\text{least upper bound}_{|z|=r,\ z\in E} |f(z)|\} = a \tag{1.2}$$

is called the type of $f(z)$ on E. The type of an entire function (of exponential type) is its type on $E=$ the whole plane.

By a statement „$f(z)$ is of type a on E" we shall often mean „$f(z)$ is of type $\leqslant a$ on E". What we mean exactly will always be clear from the context.

Results of G. PÓLYA, V. GANAPATHY IYER and N. LEVINSON (see § 2) can be summed up very roughly as follows: an entire function $f(z)$ of exponential type, which is bounded on the set of the zeros of an other entire function $g(z)$ of exponential type, must either be a constant, or $f(z)$ can not be very small as compared with $g(z)$. PÓLYA's function $g(z)$ is $\sin \pi z$, GANAPATHY IYER and LEVINSON's function $g(z)$ has very nearly the form $\sin \pi\lambda z \sinh \pi\mu z$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. In this paper (§§ 4, 7) rather more general functions $g(z)$ are tracked for which the above statement makes sense. Our results include the following as a particular case (theorem 7.2):

Let $\{z_n\}$ be a sequence of points with the property that with z_n it also contains $-z_n$. Let the points z_n be distributed according to a monotonic function $k(\vartheta)$: if ϑ_1, ϑ_2 are points of continuity of $k(\vartheta)$, $(1/r)$ times the number of z_n in the sector $\vartheta_1 \leqslant \arg z < \vartheta_2$, $|z| < r$, tends to $\{k(\vartheta_2)-k(\vartheta_1)\}$ if $r \to \infty$. We suppose that $k(\vartheta)$ is not a step-function with at most one jump on $(\vartheta_0, \vartheta_0+\pi)$, where ϑ_0 is a point of continuity of $k(\vartheta)$. (That is, the z_n should not practically all lie „near" one line). Further let for a certain $c > 0$ and for all positive integers n, m,

$$|z_n - z_m| \geqslant c\,|n-m|. \tag{1.3}$$

Now let $f(z)$ be an entire function of exponential type which is bounded on the sequence $\{z_n\}$. If $f(z)$ is of smaller type than

$$\pi \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} |\sin(\varphi-\vartheta)|\, dk(\vartheta) \tag{1.4}$$

on some line $\arg z = \varphi$, $\arg z = \varphi + \pi$, $f(z)$ must be a constant. (But there are (non-constant) entire functions, which are of type (1.4) on every line $\arg z = \varphi$, $\arg z = \varphi + \pi$, and which are bounded on $\{z_n\}$).

A result due to Miss M. L. CARTWRIGHT and slightly extended by others (see § 2) states that an entire function $f(z)$ of exponential type, which is bounded on a „nice" sequence of points all of which lie „near" one line (in fact, the sequence should not be too different from the sequence $\{cn\}$, c a constant $\neq 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) must either be bounded on that line, or $f(z)$ can not be of very small type (in fact, the type of $f(z)$ has to be $\geqslant \pi/|c|$ then). Miss CARTWRIGHT has proved a similar result for functions regular and of exponential type in a sector (see § 2). It is not known what kind of sequences can be used in Miss CARTWRIGHT's theorem except those which are practically of the form $\{cn\}$. Of course, the points of the sequence should not cluster too densely every now and then, and in particular they should not coalesce. In the last case a result can be obtained, however, if we require that some of the derivatives of $f(z)$ are also bounded on the sequence. (I hear from Mr. R. P. BOAS that he also found a result in this direction recently, thus answering a question of A. C. SCHAEFFER). This follows from our results in § 5. We mention one of them (theorem 5.2):

Let $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$, $\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant \pi$. Let $f(z)$ be regular and of exponential type in the sector S: $|z| \geqslant 0$, $\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2$. Let k be a positive integer, and let

(1.5) $$|f(n)| < C,\ |f'(n)| < C, \ldots,\ |f^{(k-1)}(n)| < C,\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Then if $f(z)$ is of smaller type than $\sin^k \pi z$ on the boundary of S, $f(z)$ is bounded on the positive real axis ($z \sin^k \pi z$ is not, however).

In § 6 we prove an extension of Miss CARTWRIGHT's theorem for a „very broad" sequence. More precisely, we consider two „nice" sequences with different directions, and our result is (theorem 6.2):

Let $f(z)$ be regular and of exponential type in the sector S: $|z| \geqslant 0$, $-\omega \leqslant \arg z \leqslant \omega$, $\omega \leqslant \frac{1}{2}\pi$. Let

(1.6) $$|f(n/\lambda)| < C,\ |f(n/\mu)| < C,\ (n = 1, 2, \ldots),$$

where $-\omega < \varphi = -\arg \lambda < \psi = -\arg \mu < \omega$. Then if $f(z)$ is of smaller type than $f_0(z) = \sin \pi\lambda z \sin \pi\mu z \exp\{\pi i(\lambda - \mu) z\}$ on the

boundary of S, $f(z)$ is bounded in the sector $\varphi \leqslant \arg z \leqslant \psi$ ($zf_0(z)$ is not, however).

Our proofs depend on interpolation, and on the use of PHRAGMÉN-LINDELÖF methods. Various applications of interpolation in the theory of functions can be found in J. M. WHITTAKER [20]. Some of the older applications of the kind considered in this paper were to functions of order two, however, and not to functions of exponential type (see [20], p. 73, and for a best possible result compare A. PFLUGER [14]).

I wish to thank Mr. H. D. KLOOSTERMAN, who has pointed out some obscurities in the original manuscript.

§ 2. *Known results: theorems of* G. PÓLYA, MISS M. L. CARTWRIGHT, V. GANAPATHY IYER *and* N. LEVINSON.

A condensed report covering the whole subject of functions of exponential type was published by R. P. BOAS JR. [4] in 1942. We shall here give a more detailed survey of a very small part of the subject. Proofs of theorems 2.1—2.4 are contained in the proofs of our generalizations.

By a theorem of S. BERNSTEIN [1] (see our cor. 3.2.1) an entire function of exponential type zero can not be bounded on a line, except if it is a constant. In 1931 PÓLYA [15] set the problem to prove the following stronger result (Cf. [21]).

Theorem 2.1. Let $f(z)$ be an entire function of exponential type zero. If $f(z)$ is bounded on the set of the integers,

$$|f(n)| < C, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2.1}$$

then $f(z)$ is a constant.

Several proofs have been given. See G. SZEGÖ [17], L. TSCHAKALOFF [19], R. E. A. C. PALEY and N. WIENER [13] p. 81—83, LEVINSON [11] p. 127—129, J. KOREVAAR [9]. LEVINSON [11] p. 127—185 has investigated what kind of sets of points lying near the real axis can be used in theorem 2.1 instead of the integers. His very general results imply for example that sequences $\{z_n\}$ of the form

$$z_n = n + O\left\{\frac{|n|}{(\log|n|)^{1+\delta}}\right\} \ (n \to \pm\infty), \quad |z_{n+1}| - |z_n| \geqslant d > 0, \tag{2.2}$$

are always admissible if $\delta > 0$, but not always if $\delta = 0$ It seems to be very difficult to prove a best possible result here.

Theorem 2.1 can be proved as follows. First show that „$f(n)$ bounded" implies „$f(x)$ bounded" (x real), and then apply S. BERNSTEIN's theorem mentioned above. The conclusion „$f(n)$ bounded" $\rightarrow$ „$f(x)$ bounded" is valid not only for entire functions of zero type, but for all entire functions of exponential type $<\pi$. (Compare $z \sin \pi z$ of type π, however). This was proved by Miss CARTWRIGHT [6].

Theorem 2.2. Let $f(z)$ be an entire function of exponential type $a < \pi$. If $f(z)$ is bounded on the set of the integers,

$$(2.3) \qquad |f(n)| < C, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

then $f(x)$ is bounded,

$$(2.4) \qquad |f(x)| < K = K(a, C), \quad (-\infty < x < \infty).$$

Other proofs of theorem 2.2 were given by A. PFLUGER [14], A. J. MACINTYRE [12], BOAS [3], R. J. DUFFIN and A. C. SCHAEFFER [7]. For the dependence of K on a see BOAS and SCHAEFFER [5]. DUFFIN and SCHAEFFER [7] (compare BOAS [3] p. 163) proved that the sequence $\{n\}$ in theorem 2.2 may be replaced by a sequence $\{z_n\}$ satisfying (cf. [22])

$$(2.5) \qquad |z_n - n| < D \; (-\infty < n < \infty), \quad |z_n - z_m| \geqslant d > 0 \quad (n \neq m).$$

The essential parts in (2.2) and (2.5) are the first inequalities. Hence (2.5) is a much heavier restriction than (2.2). According to a conjecture of BOAS all sequences $\{z_n\}$ would be admissible in theorem 2.2 which satisfy

$$(2.6) \qquad |z_n - n| < a_n \; (-\infty < n < \infty), \quad \sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n / n^2 < \infty,$$

and a condition which prevents the z_n to coalesce, or to cluster too densely.

We now turn for a moment to functions $f(z)$ regular and of exponential type in a sector S: $|z| \geqslant 0$, $-\omega \leqslant \arg z \leqslant \omega$ ($\omega \leqslant \frac{1}{2}\pi$). A result which is mainly due to V. BERNSTEIN [2]

p. 229—249 (see LEVINSON [11] p. 100—121) implies that if $f(z)$ is of type zero on a sequence $\{z_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ satisfying

$$(2.7)\qquad \lim_{n\to\infty} n/z_n=1, \quad |z_n-z_m|\geqslant c|n-m| \quad (c>0),$$

and if $f(z)$ is of type $<\pi\sin\omega$ on the sides of S, $f(z)$ must be of type zero on the positive real axis. For the „nice" sequence $z_n=n$ Miss CARTWRIGHT [6] has proved the better result

Theorem 2.3. Let $f(z)$ be regular and of exponential type in the sector S: $|z|\geqslant 0$, $-\omega\leqslant \arg z\leqslant\omega\,(\omega<\frac{1}{2}\pi)$. Let $f(z)$ be bounded on the sequence of the positive integers,

$$(2.8)\qquad |f(n)|<C \quad (n=1,2,\ldots).$$

Then if $f(z)$ is of type $<\pi\sin\omega$ on the sides of S, $f(x)$ is bounded $(x\geqslant 0)$.

This result is also true if $\omega=\frac{1}{2}\pi$ of course. For if $f(z)$ is of type $<\pi$ on the imaginary axis, $f(z)$ is of type $<\pi\sin(\pi/2-\delta)$ on $\arg z=\pi/2-\delta$, $-\pi/2+\delta$ for all sufficiently small $\delta>0$ (see our cor. 3. 1. 5). Theorem 2.3 has also been proved by MACINTYRE [12]; the case of a half-plane $(\omega=\frac{1}{2}\pi)$ was treated (with a sequence $\{z_n\}$, $n=1,2,\ldots$, satisfying $|z_n-n|<D$, $|z_n-z_m|\geqslant d>0$) by DUFFIN and SCHAEFFER [7].

An entire function of exponential type can not be bounded on two non-parallel lines, except if it is a constant (see our cor. 3. 1. 2). LEVINSON [11] p. 122—126, extending a result of GANAPATHY IYER [8], has proved the following theorem on entire functions bounded on two „orthogonal" sequences. For a simple proof of a particular case compare J. KOREVAAR [10] § 5.

Theorem 2.4. Let $\{z_n\}$ and $\{w_n\}$ be two sequences of complex numbers such that

$$(2.9)\qquad \lim_{n\to\infty} n/z_n=\lambda>0, \quad \lim_{n\to\infty} n/w_n=\mu>0,$$

and for some $c>0$

$$(2.10)\qquad |z_n-z_m|\geqslant c|n-m|, \quad |w_n-w_m|\geqslant c|n-m|.$$

Let $f(z)$ be an entire function bounded on the set $\pm z_n, \pm iw_n$:

$$(2.11) \qquad |f(\pm z_n)| \leqslant C, \quad |f(\pm iw_n)| \leqslant C, \quad (n=1,2,\ldots).$$

If $f(z)$ is of exponential type $< \pi(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}$, $f(z)$ is a constant.

Compare, however, the function $\sin \pi\lambda z \sinh \pi\mu z$ of type $\pi(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}$.

§ 3. *Auxiliary theorems: classical results of* E. PHRAGMÉN *and* E. LINDELÖF; *a generalization of a theorem of* N. LEVINSON *on entire functions with zeros having a density.*

PHRAGMÉN and LINDELÖF's theorems 3.1 and 3.2 are extensions of the maximum-modulus principle to certain infinite regions. Proofs can for example be found in [18] p. 176—179. The corollaries mentioned are well-known and can be proved very easily. Those on $H(\varphi)$, $h(\varphi)$ are due to PHRAGMÉN and LINDELÖF themselves (compare [18] p. 181—185).

Theorem 3.1. Let $f(z)$ be regular in the sector S: $|z| \geqslant 0$, $\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2$. If

$$(3.1) \qquad |f(z)| \leqslant M$$

on the sides of S, and if

$$(3.2) \qquad |f(z)| < Ae^{|z|^\lambda}, \quad \lambda < \pi/(\varphi_2 - \varphi_1),$$

for all $z \in S$, then (3.1) actually holds throughout S.

Corollary 3.1.1. If $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ (3.2) will a fortiori be satisfied if $f(z)$ is of exponential type in S.

Corollary 3.1.2. A non-constant entire function of exponential type can not be bounded on two non-parallel lines.

Corollary 3.1.3. Theorem 3.1 remains true if S is the closed region (containing a half-line with direction $\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$) bounded by two non-intersecting curves C_1, C_2 without double-points, starting at the same point z_0 and tending to infinity with asymptotic directions φ_1, φ_2 respectively.

Corollary 3.1.4. Let $f(z)$ be regular in the closed region S of cor. 3.1.3, $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi$, and let $f(z)$ satisfy (3.2) in S. If $f(z)$ is of exponential type (of exponential type 0) on the boundary of S, then $f(z)$ is of exponential type (of exponential type 0) throughout S.

More precisely, if h_1, h_2 denote the types of $f(z)$ on C_1, C_2, respectively, then there exists, to any $\varepsilon>0$, a constant $A(\varepsilon)$ such that

$$(3.3)\qquad \begin{cases} |f(re^{i\varphi})| < A(\varepsilon)\exp\,[\{H(\varphi)+\varepsilon\}r], \\ H(\varphi) = \dfrac{h_1 \sin(\varphi_2-\varphi) + h_2 \sin(\varphi-\varphi_1)}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}, \end{cases}$$

throughout S.

Corollary 3.1.5. Let $f(z)$ be regular and of exponential type in the closed region S of cor. 3.1.3. Let $h(\varphi)$ denote the type of $f(z)$ on the half-line $\arg z=\varphi$, $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$. $h(\varphi)$ is continuous for $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$; moreover lim sup $h(\varphi)$ for $\varphi\downarrow\varphi_1$, or $\varphi\uparrow\varphi_2$, is $\leqslant h_1$, or $\leqslant h_2$, respectively, where h_1 and h_2 are the types of $f(z)$ on C_1, C_2. By the continuity of $h(\varphi)$ for $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$ the type of $f(z)$ on any curve C tending to infinity with asymptotic direction φ will be $h(\varphi)$ $(\varphi_1<\varphi<\varphi_2)$. If $\varphi_2-\varphi_1<\pi$, $h(\varphi)\leqslant H(\varphi)$ (see 3.3)).

Corollary 3.1.6. If an entire function of exponential type is of type $-\infty$ on a certain half-line, or of negative type on a line (F. CARLSON; see [18] p. 185), then it must be identically zero.

In theorem 3.1, (3.2) can be replaced by the weaker condition that to every $\varepsilon>0$ there exists a constant $A(\varepsilon)$ such that

$$(3.4)\qquad |f(z)|<A(\varepsilon)\,e^{\varepsilon|z|^\lambda},\quad \lambda=\pi/(\varphi_2-\varphi_1),$$

for all $z\in S$. We are interested only in the particular case $\varphi_2-\varphi_1=\pi$ here.

Theorem 3.2. Let $f(z)$ be regular and of exponential type zero in the half-plane H: $|z|\geqslant 0$, $\varphi_1\leqslant \arg z\leqslant\varphi_1+\pi$. If

$$(3.5)\qquad |f(z)|\leqslant M$$

on the boundary of H, then (3.5) actually holds throughout H.

The following corollaries are mainly due to S. BERNSTEIN [1].

Corollary 3.2.1. A non-constant entire function of exponential type zero can not be bounded on a line. (In particular,

a non-constant entire function of order <1 can not be bounded on a line).

Corollary 3. 2.2. (Compare G. PÓLYA and G. SZEGÖ [16] vol 2, p. 35, 36, nrs 201, 202). More generally, if $f(z)$ is regular in $\Im(z) \geqslant 0$ and of exponential type a there, while $|f(x)| \leqslant M$ $(-\infty < x < \infty)$, then

$$|f(x+iy)| \leqslant M e^{ay}, \quad (y \geqslant 0). \tag{3.6}$$

It will be clear from J. HADAMARD's classical investigations that there is a close connection between the distribution of the zeros of an entire function and the growth of its modulus. LEVINSON [11] p. 92—99 has proved the following theorem on even functions with zeros having a density.

Theorem 3.3. Let $\{z_n\}$ be a sequence of complex numbers $\neq 0$ such that

$$\lim_{n\to\infty} n/z_n = \lambda \geqslant 0, \tag{3.7}$$

while for a certain $c>0$ and for all positive integers n, m,

$$|z_n - z_m| \geqslant c|n-m|. \tag{3.8}$$

If

$$F(z) = \prod_1^\infty (1 - z^2/z_n^2) \tag{3.9}$$

then there exist, to every $\varepsilon > 0$, $d > 0$, positive constants $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon, d)$ and $C(\varepsilon)$ such that

$$\left| \begin{array}{l} |F(re^{i\varphi})| < A(\varepsilon) \exp\{\pi\lambda r\,|\sin\varphi| + \varepsilon r\}, \\ |F(re^{i\varphi})| > B(\varepsilon, d) \exp\{\pi\lambda r\,|\sin\varphi| - \varepsilon r\}, \ |re^{i\varphi} \pm z_n| \geqslant d, \\ |F'(\pm z_n)| > C(\varepsilon) e^{-\varepsilon |z_n|}. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

The restriction (3.8) is necessary in order to avoid too dense clusters of zeros, which would spoil the second and the third inequality (3.10).

In some applications of our results we shall also use the following extension of LEVINSON's theorem.

Theorem 3.4. Let $F(z)$ be an even function of exponential type; $F(0) \neq 0$. We denote its zeros by z_n, $n = 1, 2, \ldots$ Let the zeros z_n be distributed according to a monotonic function

$k(\vartheta)$: if ϑ_1, ϑ_2 are points of continuity of $k(\vartheta)$, $(1/r)$ times the number of zeros z_n in the sector $\vartheta_1 \leqq \arg z < \vartheta_2$, $|z| < r$, tends to $\{k(\vartheta_2) - k(\vartheta_1)\}$ if $r \to \infty$. Further let for a certain $c > 0$ and for all positive integers n, m,

$$(3.11) \qquad |z_n - z_m| \geqq c|n-m|.$$

Then to every $\varepsilon > 0$, $d > 0$, there exist positive constants $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon, d)$ and $C(\varepsilon)$ such that

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{aligned} &|F(re^{i\varphi})| < A(\varepsilon) \exp\{\pi r \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} |\sin(\varphi - \vartheta)|\, dk(\vartheta) + \varepsilon r\}, \\ &|F(re^{i\varphi})| > B(\varepsilon, d) \exp\{\pi r \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} |\sin(\varphi - \vartheta)|\, dk(\vartheta) - \varepsilon r\}, \\ &\qquad\qquad |re^{i\varphi} - z_n| \geqq d, \\ &|F'(r_n e^{i\varphi_n})| > C(\varepsilon) \exp\{\pi r_n \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} |\sin(\varphi_n - \vartheta)|\, dk(\vartheta) - \varepsilon r_n\}, \\ &\qquad\qquad r_n e^{i\varphi_n} = z_n. \end{aligned} \right.$$

Here ϑ_0 is an arbitrary point of continuity of $k(\vartheta)$.

Proof of theorem 3.4. (i) We suppose that the zeros z_n of $F(z)$ all belong to a double-sector $-\delta \leqq \arg z < \delta$, $\pi - \delta \leqq \arg z < \pi + \delta$, $0 < \delta < \frac{1}{4}\pi$. $(1/r)$ times the number of zeros z_n satisfying $|z_n| < r$ will tend to 2λ $(r \to \infty)$, λ a constant $\geqq 0$. We shall prove that to every $\varepsilon > 0$, $d > 0$ there are constants $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon, d) > 0$ such that

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{aligned} &|F(re^{i\varphi})| < A(\varepsilon) \exp\{\pi\lambda r\,|\sin\varphi| + (3\pi\lambda\delta + \varepsilon) r\}, \\ &|F(re^{i\varphi})| > B(\varepsilon, d) \exp\{\pi\lambda r\,|\sin\varphi| - (3\pi\lambda\delta + \varepsilon) r\}, \\ &\qquad\qquad |re^{i\varphi} - z_n| \geqq d. \end{aligned} \right.$$

Denote the zeros of $F(z)$ in $-\delta \leqq \arg z < \delta$ by $w_1, w_2, \ldots$ As they form a subset of the z_n we can arrange them such that

$$(3.14) \qquad |w_n - w_m| \geqq c|n-m|.$$

By Hadamard's well-known factorization theorem, because $F(z)$ is even,

$$(3.15) \qquad F(z) = D \prod_1^\infty (1 - z^2/w_n^2),$$

D a constant. Put

$$P(\varepsilon,z)=D\prod_{\substack{|w_n|\leqslant(1-\varepsilon)|z|\\ |w_n|\geqslant(1+\varepsilon)|z|}}(1-z^2/w_n^2). \tag{3.16}$$

Clearly

$$\left\{\begin{array}{l} |1-|z|^2/|w_n|^2|\leqslant|1-z^2/w_n^2|\leqslant|1-|z|^2e^{4i\delta}/|w_n|^2|, \\ \qquad\qquad -2\delta\leqslant\arg z^2<2\delta, \\ |1-z^2e^{-2i\delta}/|w_n|^2|\leqslant|1-z^2/w_n^2|\leqslant|1-z^2e^{2i\delta}/|w_n|^2|, \\ \qquad\qquad 2\delta\leqslant\arg z^2<\pi-2\delta, \\ |1+|z|^2e^{-4i\delta}/|w_n|^2|\leqslant|1-z^2/w_n^2|\leqslant|1+|z|^2/|w_n|^2|, \\ \qquad\qquad \pi-2\delta\leqslant\arg z^2<\pi+2\delta, \\ |1-z^2e^{2i\delta}/|w_n|^2|\leqslant|1-z^2/w_n^2|\leqslant|1-z^2e^{-2i\delta}/|w_n|^2|, \\ \qquad\qquad \pi+2\delta\leqslant\arg z^2<2\pi-2\delta \end{array}\right. \tag{3.17}$$

We remark that

$$n/|w_n|\to\lambda \quad (n\to\infty). \tag{3.18}$$

Now (3.15), (3.17), (3.18) and the first inequality (3.10) (for which (3.8) is not necessary) easily yield the first inequality (3.13).

It follows from (3.16), (3.17), (3.18) and the proof of LEVINSON's theorem [11] p. 92—99 (see LEVINSON's formulae (22.22), (22.23) if $\lambda>0$, and (22.31), (22.34) if $\lambda=0$) that

$$|P(\varepsilon,re^{i\varphi})|>B(\varepsilon)\exp\{\pi\lambda r\,|\sin\varphi|-(3\pi\lambda\delta+\tfrac{1}{2}\varepsilon)r\}, \tag{3.19}$$

and also (see LEVINSON's formulae (22.14), (22.30)) that (we use (3.14) only now),

$$\prod_{(1-\varepsilon)|z|<|w_n|<(1+\varepsilon)|z|}|1-r^2e^{2i\varphi}/w_n^2|>B'(\varepsilon,d)\exp(-\tfrac{1}{2}\varepsilon r), \quad |re^{i\varphi}\pm w_n|\geqslant d. \tag{3.20}$$

Combining (3.19) and (3.20) we get the second inequality (3.13).

(ii) Let $\vartheta_0<\vartheta_1<\ldots<\vartheta_p=\vartheta_0+\pi$ be points of continuity of $k(\vartheta)$ such that $\max(\vartheta_j-\vartheta_{j-1})=2\delta<\frac{1}{2}\pi$, while for all φ

$$\left|\sum_{j=1}^{p}|\sin\{\varphi-\tfrac{1}{2}(\vartheta_{j-1}+\vartheta_j)\}|\,\{k(\vartheta_j)-k(\vartheta_{j-1})\}-\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi}|\sin(\varphi-\vartheta)|\,dk(\vartheta)\right|<\eta, \tag{3.21}$$

where η is a pre-assigned positive number.

We may apply (3.13) to each of the functions of the form (3.15) formed with the zeros $w_1, w_2, \ldots$ of $F(z)$ belonging to the sector $\vartheta_{j-1} \leqslant \arg z < \vartheta_j$, $j=1,2,\ldots,p$. Combining the inequalities of the form (3.13) thus obtained and using (3.21) we get, for every $\varepsilon > 0$, $d > 0$,

$$(3.22)\quad \left|\begin{aligned} &|F(re^{i\varphi})| < A(\varepsilon) \exp\left\{\pi r \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} |\sin(\varphi-\vartheta)|\, dk(\vartheta) + \varepsilon' r\right\}, \\ &|F(re^{i\varphi})| > B(\varepsilon, d) \exp\left\{\pi r \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} |\sin(\varphi-\vartheta)|\, dk(\vartheta) - \varepsilon' r\right\}, \\ &\qquad\qquad |re^{i\varphi} - z_n| \geqslant d, \end{aligned}\right.$$

where

$$(3.23)\qquad \varepsilon' = 3\pi\delta \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} dk(\vartheta) + p\varepsilon + \eta.$$

Now if ε' is a given positive number, we can first determine a $\delta > 0$ ($\delta < \frac{1}{4}\pi$) and an $\eta > 0$ which are so small that something remains for $p\varepsilon$ in (3.23). Then we determine p and $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{p-1}$ satisfying $\vartheta_j - \vartheta_{j-1} \leqslant 2\delta$ ($j=1,2,\ldots,p$) and (3.21). Finally we determine ε by (3.23). This proves the first and the second inequality (3.12).

The third inequality gives no difficulty now. Take $d = \frac{1}{2}c$. For $|z - z_n| \leqslant d$, $F(z)/(z-z_n)$ is regular and $\neq 0$. Hence

$$(3.24)\qquad |F'(z_n)| \geqslant \min_{|z-z_n|=d} |F(z)|/d.$$

Applying the second inequality (3.12) we get the third.

§ 4. *A theorem of the type of* G. Pólya's *theorem* 2.1.

The zeros of $\sin \pi z$ are $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Clearly $\sin \pi z$ satisfies an inequality of the form

$$(4.1)\qquad |\sin \pi z| > Be^{A|z|}, \quad A > 0, \quad B > 0,$$

on the set $|z| \geqslant d > 0$, $\frac{1}{4}\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{7}{4}\pi$. Finally $(\sin \pi z)' = \pi \cos \pi z$ is bounded away from zero on the set of the integers. Hence theorem 2.1 is contained in our

Theorem 4.1. Let $g(z)$ be an entire function of exponential type with zeros $z_1, z_2, \ldots$ Let U be some double-sector $|z| \geqslant 0$,

$\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2$, $\varphi_1 + \pi \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 + \pi (\varphi_1 < \varphi_2)$. To every $d > 0$ let there exist constants $A > 0$, $B > 0$ such that

$$(4.2) \qquad |g(z)| > B e^{A|z|}$$

for all $z \in U$ satisfying $|z - z_n| \geqslant d$. Finally, let for a certain $C > 0$

$$(4.3) \qquad |g'(z_n)| > C \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Let $f(z)$ be an entire function of exponential type which is bounded on the sequence $\{z_n\}$:

$$(4.4) \qquad |f(z_n)| < D \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

If $f(z)$ is of zero type on a line belonging to U, $f(z)$ must be a constant.

Proof. Define

$$(4.5) \qquad h(z) = \delta z^{-1} \{f(z) - f(0)\},$$

where $\delta > 0$ is so small that

$$(4.6) \qquad |h(z_n)| \leqslant (|z_n| + 1)^{-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Since $g(z)$ is of exponential type we have as an easy application of J. L. W. V. JENSEN's formula (see [18] p 249) that there must be a constant $c > 0$ such that $|z_n| > cn$ $(n > n_0)$. Hence by (4.6) and (4.3)

$$(4.7) \qquad H(z) = g(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(z_n)}{g'(z_n)\,(z - z_n)}$$

represents an entire function which is equal to $h(z)$ at $z_1, z_2, \ldots$ We shall prove that $H(z) = h(z)$.

Let

$$(4.8) \qquad v(z) = \{h(z) - H(z)\}/g(z).$$

$v(z)$ is an entire function. It is of exponential type. For to every $\varepsilon > 0$, $d > 0$, there exists a constant $E(\varepsilon, d) > 0$ such that

$$(4.9) \qquad |g(z)| > E(\varepsilon, d) \exp(-|z|^{1+\varepsilon}), \quad |z - z_n| \geqslant d,$$

(J. HADAMARD; see [18] p. 273). Now if d is small enough, the circles $|z - z_n| < d$, $|z_n| < r$, can only form conglomerates the dimensions of which are small compared to r. For the number of z_n, $|z_n| < r$, is $< \lambda r$, λ a constant. Hence, using the maximum-

modulus theorem for these conglomerates, $v(z)$ is of order 1. But by a similar argument we find from (4.2) that $v(z)$ is of exponential type in the double-sector $\varphi_1+\eta\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2-\eta$, $\varphi_1+\pi+\eta\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2+\pi-\eta$, $0<2\eta<\varphi_2-\varphi_1$. Hence $v(z)$ is of exponential type by theorem 3.1.

Let U' be a double-sector contained in U and in which $f(z)$ and hence $h(z)$ are of type $<A$ (see cor. 3. 1.5, 3. 1.4). By (4.8), (4.2), (4.7), (4.6), (4.3) $v(z)$ tends to zero on every curve in U' which tends to infinity, and which avoids the circles $|z-z_n|<d$. Such curves exist in every given sector contained in U', if d is chosen sufficiently small. For the number of z_n with modulus between $\frac{1}{2}r$ and r is $<\lambda r$. Hence $v(z)$ is bounded (compare theorem 3.1). That is, $v(z)$ must be a constant, which can only be zero: $h(z)=H(z)$.

For every positive integer p, $h^p(z)$ is an entire function of exponential type which is of type zero on a line of U, and which satisfies the inequality given for $h(z)$ in (4.6). For a similar remark compare LEVINSON [11] p. 125, 128—129, 133—135. Hence, applying the above argument to $h^p(z)$,

$$h^p(z)=g(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^p(z_n)}{g'(z_n)\,(z-z_n)}. \tag{4.10}$$

By (4.10), (4.6), (4.3),

$$|h(z)|^p\leqslant|g(z)|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C(|z_n|+1)|z-z_n|}. \tag{4.11}$$

Keeping z fixed and letting $p\to\infty$ we find that

$$|h(z)|\leqslant 1. \tag{4.12}$$

Hence $h(z)$ is a constant, which by (4.6) can only be zero. Thus by (4.5), $f(z)=f(0)$.

Remark. Other examples than $\sin\pi z$ of functions $g(z)$ satisfying (4.2), (4.3) are furnished by those functions $F(z)$ investigated in theorem 2.4 for which $k(\vartheta)$ is not a step-function with at most one discontinuity on $(\vartheta_0,\vartheta_0+\pi)$. For except in the latter case,

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} |\sin(\varphi-\vartheta)|\,dk(\vartheta) > 0$$

for all φ. This remark will explain why such „nice" sequences $\{z_n\}$ have to be used in PÓLYA's theorem if we require that the z_n lie „near" the real axis.

§ 5. *Extensions of* Miss M. L. CARTWRIGHT's *theorems* 2.2, 2.3: *boundedness of a function and some of its derivatives on the set of the (positive) integers.*

The following result slightly generalizes Miss CARTWRIGHT's theorem 2.3. The proof is different from the known proofs of theorem 2.3, but as Mr. R. P. BOAS pointed out to me, he and A. C. SCHAEFFER [5] used an idea similar to the idea of (5.12), (5.13) in our proof, to obtain (the easier) theorem 2.2 (compare also J. KOREVAAR [10] § 4).

Theorem 5.1. Let $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$, $\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant \pi$. Let $f(z)$ be regular and of exponential type in the sector S ($|z| \geqslant 0$, $\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2$):

$$(5.1) \qquad |f(z)| < Be^{A|z|}$$

throughout S. Let $f(z)$ be bounded on the sequence of the positive integers:

$$(5.2) \qquad |f(n)| < C \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Then if $f(z)$ is of smaller type than $\sin \pi z$ on the boundary of S:

$$(5.3) \qquad |f(re^{i\varphi_j})| < \beta \exp\{(\pi-\delta)|\sin \varphi_j| r\} \quad (r \geqslant 0,\ j = 1, 2)$$

for certain constants β and $\delta > 0$, the function $f(z)$ is bounded on the positive real axis:

$$(5.4) \qquad |f(x)| < K = K(C, \varphi_1, \varphi_2, \beta, \delta) \quad (x \geqslant 0).$$

Remark. If $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ we may replace (5.1) by the requirement that $f(z)$ be of order $< \pi/(\varphi_2 - \varphi_1)$ in S. For by cor. 3 1.4 (5.3) will then imply an inequality (5.1). In this case A and B depend on $\varphi_1, \varphi_2, \beta, \delta$ only.

Proof of theorem 5.1. Let

$$(5.5) \qquad g(z) = z(z+1)^{-3/2} f(z).$$

(Here, a factor $(z+1)^{-1/2}$ is used in order to achieve convergence of the series in (5.6). We could not use $(z+1)^{-1}$ because that would spoil the combination of the estimations (5.8) and (5.15). The further factor $z(z+1)^{-1}$ in (5.5) is added in order to obtain a function $h(z)$ (see (5.6)) which is regular at $z=0$). Define

$$g(z)-\sin \pi z \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n g(n)}{\pi(z-n)}=(z+1)^{-1/2} \sin \pi z \cdot h(z). \tag{5.6}$$

(i) Clearly $h(z)$ is regular in S. It is of exponential type there, for in the closed region obtained from S by omitting the circles $|z-n|<\frac{1}{2}$, $\sin \pi z$ is bounded away from zero. Hence $h(z)$ is of exponential type in that region, and then by the maximum-modulus theorem in the whole of S.

We shall now prove that $h(z)$ is bounded in S. By (5.6), (5.3), (5.2), if $d(\varphi_j)=\min\limits_r |re^{i\varphi_j}+1|$,

$$\begin{aligned} |h(re^{i\varphi_j})| \leqslant \frac{r}{d(\varphi_j)} \cdot \frac{\beta \exp\{(\pi-\delta)|\sin \varphi_j| r\}}{\frac{1}{2}\{\exp(\pi|\sin \varphi_j| r)-1\}}+ \\ +(r+1)^{1/2}\Big\{\sum_{n\leqslant r}+\sum_{n>r}\Big\}' \frac{Cn}{\pi(n+1)^{3/2}|re^{i\varphi_j}-n|}, \quad (j=1,2). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Here

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{n\leqslant r}\frac{n}{(n+1)^{3/2}|re^{i\varphi_j}-n|} \leqslant \frac{1}{r|\sin \varphi_j|}\sum_{n\leqslant r} n(n+1)^{-3/2}<\frac{2(r+1)^{1/2}}{r|\sin\varphi_j|} \\ &\qquad\qquad (r\geqslant 1), \\ &\sum_{n>r}\frac{n}{(n+1)^{3/2}|re^{i\varphi_j}-n|} \leqslant \frac{1}{|\sin\varphi_j|}\sum_{n>r}{}'(n+1)^{-3/2}<\frac{3(r+1)^{1/2}}{|\sin\varphi_j|} \\ &\qquad\qquad (r\geqslant 0). \end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

By (5.7), (5.8),

$$|h(re^{i\varphi_j})|<M=M(C, \varphi_1, \varphi_2, \beta, \delta). \tag{5.9}$$

Hence if $\varphi_2-\varphi_1<\pi$, $h(z)$ is bounded by M throughout S (see theorem 3.1). If $\varphi_2-\varphi_1=\pi$ we remark that by the argument of (5.7), (5.8), $h(z)$ is bounded on any half-line $\arg z=\varphi$, $\varphi_1<\varphi<0$,

which is so near $\arg z=\varphi_1$ that $f(z)$ is still of a type less than that of $\sin \pi z$ on $\arg z=\varphi$ (compare cor. 3. 1.5). By theorem 3.1 $h(z)$ will therefore be bounded in S; by theorem 3.2 its bound is given by the bound of $h(z)$ on the sides of S. Hence we find in both cases that in particular

$$(5.10) \qquad |h(x)|<M=M(\delta)=M(C, \varphi_1, \varphi_2, \beta, \delta), \quad (x\geqslant 0).$$

(5.10), together with (5.5), (5.6), are not yet sufficient to prove that $f(x)$ is bounded $(x\geqslant 0)$. We shall therefore derive a better interpolation-formula for $g(z)$ than (5.6), namely, (5.13). (Compare Boas [3] theorem 2, Boas and Schaeffer [5], J. Korevaar [10] § 4).

(ii) Instead of $f(z)$ we now consider $f_1(\lambda, z)=f(z)\cos \lambda z$, $f_2(\lambda, z)=f(z)\sin \lambda z$, where $0\leqslant\lambda\leqslant\varepsilon<\delta$. Let the corresponding functions g and h be denoted by $g_i(\lambda, z)$, $h_i(\lambda, z)$. $f_1(\lambda, z)$ and $f_2(\lambda, z)$ satisfy the conditions given for $f(z)$ in theorem 5.1, with A replaced by $A+\varepsilon$, δ replaced by $\delta-\varepsilon$. Hence by (5.10),

$$(5.11) \qquad |h_i(\lambda, x)|<M=M(\delta-\varepsilon) \quad (x\geqslant 0,\ i=1,2).$$

Using (5.6) for the functions $g_i(\lambda, z)$ we get

$$(5.12) \qquad \left| \begin{aligned} g(z) &= g_1(\lambda, z)\cos \lambda z+g_2(\lambda, z)\sin \lambda z= \\ &=\sin \pi z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n g(n)\cos \lambda(z-n)}{\pi(z-n)}+ \\ &+(z+1)^{-1/2}\sin \pi z\{h_1(\lambda,z)\cos \lambda z+h_2(\lambda,z)\sin \lambda z\}. \end{aligned} \right.$$

Integrating with respect to λ from 0 to ε and dividing by ε we get

$$(5.13) \qquad \left| \begin{aligned} g(z) &=\sin \pi z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n g(n)\sin \varepsilon(z-n)}{\pi\varepsilon(z-n)^2}+ \\ &+(z+1)^{-1/2}\sin \pi z\cdot\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\{h_1(\lambda,z)\cos \lambda z+h_2(\lambda,z)\sin \lambda z\}\,d\lambda. \end{aligned} \right.$$

Hence by (5.5) and (5.11),

$$(5.14)\qquad \begin{aligned} |f(x)| \leqslant \frac{(x+1)^{3/2}}{x} |\sin \pi x| \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{Cn|\sin \varepsilon(x-n)|}{\pi\varepsilon(n+1)^{3/2}(x-n)^2} + \\ + \frac{x+1}{x}|\sin \pi x| \cdot 2M(\delta-\varepsilon). \end{aligned}$$

For a certain constant D,

$$(5.15)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{n<x-1}{}' \frac{n|\sin \pi x| \cdot |\sin \varepsilon(x-n)|}{(n+1)^{3/2}(x-n)^2} \leqslant \sum_{n<x-1}{}' \frac{1}{(n+1)^{1/2}(x-n)^2} < \\ &\qquad\qquad\qquad < D(x+1)^{-1/2}, \\ &\qquad \sum_{x-1\leqslant n\leqslant x+1} < D(x+1)^{-1/2}, \quad \sum_{n>x+1} < D(x+1)^{-1/2}. \end{aligned} \right.$$

Now let $\varepsilon = \frac{1}{2}\delta$. By (5.14), $f(x)$ is bounded for $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. For $x > \frac{1}{2}$ we combine (5.14) and (5.15). Thus

$$(5.16)\qquad |f(x)| < K = K(C, \varphi_1, \varphi_2, \beta, \delta), \quad (x \geqslant 0),$$

which is the desired result.

We shall now prove a more general result with boundedness of some of the derivatives of $f(z)$ on the sequence of the positive integers also.

Theorem 5.2. Let $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$, $\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant \pi$. Let $f(z)$ be regular and of exponential type in the sector S: $|z| \geqslant 0$, $\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2$. Let k be a positive integer, and let

$$(5.17)\quad |f(n)| < C,\ |f'(n)| < C, \ldots,\ |f^{(k-1)}(n)| < C \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Then if $f(z)$ is of smaller type than $\sin^k \pi z$ on the boundary of S:

$$5.18)\quad |f(re^{i\varphi_j})| < \beta \exp\{(k\pi - \delta)|\sin \varphi_j| r\} \quad (r \geqslant 0, j = 1, 2)$$

for certain constants β and $\delta > 0$, $f(z)$ is bounded on the positive real axis:

$$(5.19)\qquad |f(x)| < K = K(k, C, \varphi_1, \varphi_2, \beta, \delta), \quad (x \geqslant 0).$$

Remark. The example $z \sin^k \pi z$ shows that, in a certain sense, theorem 5.2 is a best possible result.

Proof. By theorem 5.1 the result is true for $k=1$. Assume that it is true for $k=p$. We shall prove that it is true for $k=p+1$ also. Define $g(z)$ as in (5.5) and put

$$(5.20)\qquad g(z)-\sin\pi z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n g(n)\sin\gamma(z-n)}{\pi\gamma(z-n)^2}=$$
$$=(z+1)^{-1/2}\sin\pi z\cdot F(z),\ \ \gamma=\tfrac{1}{2}\pi p.$$

$F(z)$ is regular and of exponential type in S. Further, $F(n), F'(n),\ldots, F^{(p-1)}(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ are bounded by a constant depending only on C and $\gamma=\frac{1}{2}\pi(k-1)$. Finally $F(re^{i\varphi_j})$ satisfies an inequality of the form (5.18) with $k=p$ instead of $p+1$, and with constants β and δ depending only on the old constants $k, C, \varphi_1, \varphi_2, \beta, \delta$. Hence by the induction hypothesis

$$(5.21)\qquad |F(x)|<K'(k, C, \varphi_1, \varphi_2, \beta, \delta),\quad (x\geqslant 0).$$

The desired result on $f(x)$ follows from (5.21) by an estimation of the form (5.14), (5.15).

From theorem 5.2 we can derive the following extension of theorem 2.2.

Theorem 5.3. Let k be a positive integer. If $f(z)$ is an entire function of exponential type satisfying

$$(5.22)\quad |f(n)|<C,\ |f'(n)|<C,\ldots,\ |f^{(k-1)}(n)|<C,\ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

and if $f(z)$ is of smaller type than $\sin^k\pi z$ on some line $\arg z=\varphi_1$, $\arg z=\varphi_1+\pi$:

$$(5.23)\quad |f(re^{i\varphi})|<\beta\exp\{(k\pi|\sin\varphi|-\delta)r\}\ \ (r\geqslant 0, \varphi=\varphi_1, \varphi=\varphi_1+\pi),$$

for certain constants β and $\delta>0$, then $f(z)$ is bounded on the real axis:

$$(5.24)\qquad |f(x)|<K=K(k, C, \delta),\quad (-\infty<x<\infty).$$

Remark. $z\sin^k\pi z$ is not bounded on the real axis.

Proof. If $f(z)$ is of smaller type than $\sin^k\pi z$ on the real axis, $f(z)\equiv 0$ by cor. 3.1.6. If $\varphi_1\neq 0$ or π it follows from theorem 5.2 that $f(x)$ is bounded by a constant $K(-\infty<x<\infty)$. It remains to be proved that K does not depend on β or φ_1. We shall prove this by a device used by R. J. Duffin and A. C. Schaeffer [7] in a similar situation.

Suppose that we could find no K which is independent of β and φ_1. Then there would be a sequence of functions $f_p(z)$, $p=1,2,\ldots$, satisfying the conditions of theorem 5.3 with fixed k, C, δ, but with variable β and φ_1, and such that

$$(5.25)\qquad \underset{-\infty<x<\infty}{\text{l. n. b.}} |f_p(x)| = K_p \to \infty \quad (p\to\infty).$$

Let $|f_p(x_p)| > K_p - 1$, and define

$$(5.26)\qquad F_p(z) = K_p^{-1} f_p(z + [x_p]), \quad (p=1,2,\ldots).$$

We have

$$(5.27)\qquad \left| \begin{array}{l} |F_p(x)| \leqslant 1 \, (-\infty < x < \infty), \ \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |F_p(x)| > 1 - K_p^{-1}, \\ |F_p(n)| < K_p^{-1} C, \ |F'_p(n)| < K_p^{-1} C, \ldots, \ |F_p^{(k-1)}(n)| < K_p^{-1} C, \\ \qquad\qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{array} \right.$$

By the first inequality (5.27), by (5.23) (where φ_1 must be $\neq 0$ or π because $f_p(z) \not\equiv 0$) and by cor. 3. 1.4, 3. 2.2

$$(5.28)\qquad |F_p(x+iy)| \leqslant \exp\{(k\pi - \delta)|y|\}, \quad p = 1,2,\ldots.$$

By (5.28) the functions $F_p(z)$, $p=1,2,\ldots$, are uniformly bounded in every bounded region. Hence there will be a sub-sequence of the $F_p(z)$ converging uniformly in every bounded region. The limit-function $F_0(z)$ of such a sub-sequence will be an entire function of exponential type $< k\pi$ (see (5.28)), satisfying (see (5.27))

$$(5.29)\qquad \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |F_0(x)| = 1, \ F_0(n) = 0, \ F'_0(n) = 0, \ldots, \ F^{(k-1)}_0(n) = 0, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

By (5.29) $F_0(z)/\sin^k \pi z$ is an entire function. It is of exponential type, and of type < 0 on the imaginary axis since $F_0(z)$ is of type $< k\pi$. Hence $F_0(z) \equiv 0$ by cor. 3. 1.6, contrary to (5.29).

§ 6. *Functions of exponential type in a sector which are small on two sequences.*

In this section we consider functions $f(z)$ which are regular and of exponential type in the sector S: $|z| \geqslant 0$, $-\omega \leqslant \arg z \leqslant \omega$, $\omega \leqslant \frac{1}{2}\pi$, and which are of prescribed growth on two sequences

with asymptotic directions φ, ψ respectively, $-\omega < \varphi < \psi < \omega$. First we prove a result of the V. BERNSTEIN type for sequences having a positive density; we derive from it a result of the Miss M. L. CARTWRIGHT type for „nice" sequences (compare § 2). We also mention a slight extension of N. LEVINSON's theorem 2.4.

Theorem 6.1. Let $f(z)$ be regular and of exponential type in the sector S: $|z| \geqslant 0$, $-\omega \leqslant \arg z \leqslant \omega$, $\omega < \frac{1}{2}\pi$. Let $f(z)$ be of zero type on two sequences $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ satisfying

$$(6.1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{z_n} = \lambda \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{w_n} = \mu \neq 0,$$

$-\omega < \varphi = -\arg \lambda < \psi = -\arg \mu < \omega$, and, for a certain $c > 0$,

$$(6.2) \qquad |z_n - z_m| \geqslant c\,|n-m|, \quad |w_n - w_m| \geqslant c\,|n-m|.$$

Then if $f(z)$ is of no greater type than

$$(6.3) \qquad f_0(z) = \sin \pi\lambda z \sin \pi\mu z \exp\{\pi i(\lambda - \mu) z\}$$

on the boundary of S, $f(z)$ is of no greater type than $f_0(z)$ on any half-line of S. In particular, $f(z)$ is of zero type in the sector $\varphi \leqslant \arg z \leqslant \psi$.

Remarks. For $\omega = \frac{1}{2}\pi$ we get a correct result if we replace the first „no greater" in theorem 6.1 by „smaller" (see cor. 3.1.5). It is not difficult to derive from theorem 6.1 a result for the case that $f(z)$ is of type α on $\{z_n\}$ and of type β on $\{w_n\}$. It is also possible to prove a related theorem for more than two sequences.

The example $f(z) = f_0(z)\, e^{\varepsilon z}$, $\varepsilon > 0$, shows that theorem 6.1 is, in a certain sense, a best possible result.

Proof of theorem 6.1. We may omit some of the z_n and w_n and hence we may suppose that $z_n \neq 0$, $w_n \neq 0$, $z_n \neq w_m$, $z_n \in S$, $w_n \in S$. Now let

$$(6.4) \qquad G(z) = \prod_1^\infty (1 - z^2/z_n^2), \quad H(z) = \prod_1^\infty (1 - z^2/w_n^2).$$

By theorem 3.3, if $\varepsilon > 0$, $d > 0$,

$$(6.5)\quad \left|\begin{array}{l} |G(re^{i\vartheta})| < A(\varepsilon)\exp\{\pi|\lambda|r|\sin(\vartheta-\varphi)|+\varepsilon r\}, \\ |G(re^{i\vartheta})| > B(\varepsilon, d)\exp\{\pi|\lambda|r|\sin(\vartheta-\varphi)|-\varepsilon r\}, \\ |G'(z_n)| > C(\varepsilon)\exp(-\varepsilon|z_n|), \end{array}\right. \qquad |re^{i\vartheta} \pm z_n| \geqslant d,$$

for certain constants $A, B, C > 0$. Similar inequalities hold for $H(z)$.

Let $\delta > 0$. We define $v(z)$ by

$$(6.6)\quad \left|\begin{array}{l} f(z)\exp\{\pi i(\mu-\lambda)z-\delta z\} = \\ \quad = G(z)H(z)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(z_n)\exp\{\pi i(\mu-\lambda)z_n-\delta z_n\}}{G'(z_n)H(z_n)(z-z_n)} + \\ \quad + G(z)H(z)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(w_n)\exp\{\pi i(\mu-\lambda)w_n-\delta w_n\}}{G(w_n)H'(w_n)(z-w_n)} + \\ \qquad + G(z)H(z)v(z). \end{array}\right.$$

By (6.5) and the corresponding results for $H(z)$, $v(z)$ is regular and of exponential type in S. Moreover $v(z)$ is bounded on the sides of S. Hence by theorem 3.1, $v(z)$ is bounded throughout S.

Estimating $f(z)$ from (6.6) we find in S, leaving out the circles $|z-z_n| < d$, $|z-w_n| < d$, $(d \leqslant \frac{1}{2}c)$,

$$(6.7)\qquad |f(z)| < D\,|G(z)H(z)\exp\{\pi i(\lambda-\mu)z+\delta z\}|,$$

D independent of z. Taking into account the inequalities of the form (6.5) and applying the maximum-modulus theorem for the omitted circles we find

$$(6.8)\quad \left\{\begin{array}{l} |f(re^{i\vartheta})| < E\exp\{\pi|\lambda|r|\sin(\vartheta-\varphi)| + \\ \quad + \pi|\mu|r|\sin(\vartheta-\psi)| + \Re(\pi i(\lambda-\mu)re^{i\vartheta}) + (2\varepsilon+\delta)r\} \end{array}\right.$$

for all $re^{i\vartheta} = z \in S$, E independent of z. Since ε and δ were arbitrary positive numbers this proves the theorem.

The following corollary slightly generalizes LEVINSON's theorem 2.4. We shall prove a much more general result in § 7, however.

Corollary to theorem 6.1. Let $f(z)$ be an entire function of exponential type which is bounded on two sequences $\pm z_n$,

$\pm w_n$, where the z_n and w_n satisfy (6.1), (6.2). If $f(z)$ is of smaller type than $f_1(z) = \sin \pi\lambda z \sin \pi\mu z$, $f(z)$ is a constant.

Remark. It is sufficient to suppose that $f(z)$ is of smaller type than $f_1(z)$ on some line (see theorem 7.2).

Proof. On the line $\Re\{\pi i(\lambda-\mu)z\} = 0$, $f(z)$ is of smaller type than $f_0(z)$ (see theorem 6.1). Hence by theorem 6.1 (see the remarks) $f(z)$ is of zero type in $\varphi \leqslant \arg z \leqslant \psi$, $\varphi+\pi \leqslant \arg z \leqslant \psi+\pi$. Application of theorem 4.1 completes the proof.

We now turn to „nice" sequences.

Theorem 6.2. Let $f(z)$ be regular and of exponential type in the sector S: $|z| \geqslant 0$, $-\omega \leqslant \arg z \leqslant \omega$, $\omega \leqslant \frac{1}{2}\pi$. Let $f(z)$ be bounded on two „nice" sequences:

(6.9) $$|f(n/\lambda)| < C, \quad |f(n/\mu)| < C, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$-\omega < \varphi = -\arg \lambda < \psi = -\arg \mu < \omega$. Then if $f(z)$ is of smaller type than

(6.10) $$f_0(z) = \sin \pi\lambda z \sin \pi\mu z \exp\{\pi i(\lambda-\mu)z\}$$

on the boundary of S, $f(z)$ is bounded in the sector $\varphi \leqslant \arg z \leqslant \psi$.

Remark. It follows from the example $f(z) = zf_0(z)$ that theorem 6.2 is, in a certain sense, a best possible result.

Proof. By theorem 6.1, $f(z)$ is of type zero on $\arg z = \varphi$. As $f(z)$ is of type $< 2\pi|\lambda| \sin(\varphi+\omega)$ on $\arg z = -\omega$, $f(z)$ is of type $< 2\pi|\lambda| \sin(\varphi-\vartheta)$ on $\arg z = \vartheta$, $-\omega \leqslant \vartheta < \varphi$, by cor. 3.1.4. Now let $\gamma = \min(\varphi+\omega, \psi-\varphi)$. On the sides of the sector S' $(\varphi-\gamma \leqslant \arg z \leqslant \varphi+\gamma)$, $f(z)$ is of type $2\pi\varrho|\lambda| \sin\gamma$, $\varrho < 1$, and of zero type, respectively. Hence $F(z) = f(z)\exp(-\pi i\varrho\lambda z)$ is of type $< \pi|\lambda| \sin\gamma$ on both sides of S'. As $F(n/\lambda)$ is bounded, $F(x/\lambda)$ is bounded $(x \geqslant 0)$ by theorem 5.1. That is, $f(z)$ is bounded on $\arg z = \varphi$.

In the same way we prove that $f(z)$ is bounded on $\arg z = \psi$. Hence $f(z)$ is bounded in the sector $\varphi \leqslant \arg z \leqslant \psi$ by theorem 3.1.

§ 7. *Entire functions of exponential type bounded on the set of the zeros of other entire functions of exponential type.*

In this section we shall prove a rather far-reaching extension of V. Ganapathy Iyer and N. Levinson's theorem 2.4.

Our result can roughly be stated as follows. If $f(z)$ and $g(z)$ are entire functions of exponential type, and if $f(z)$ is bounded on the set of the zeros of $g(z)$, then if the zeros of $g(z)$ do not all lie „near" one line, and are not distributed too irregularly, $f(z)$ must either be a constant, or $f(z)$ can not be very small as compared with $f(z)$. In particular, if $g(z)$ is a function of the form considered in theorem 3.4, ($k(\vartheta)$ not a step-function with at most one jump on $(\vartheta_0, \vartheta_0+\pi)$), $f(z)$ must either be a constant or $f(z)$ is on every line of at least the same type as $g(z)$ (compare our corollary to theorem 6.1).

Theorem 7.1. Let $g(z)$ be an entire function of exponential type with zeros $z_1, z_2, \ldots$; $|z_n - z_m| \geqslant c$ for a certain $c > 0$ $(n \neq m)$. Let there be an $\alpha > 0$, a $\beta > 0$ and a φ_0 such that to every $\varepsilon > 0$, $d > 0$ there exist constants $A(\varepsilon) > 0$, $B(\varepsilon, d) > 0$, $B'(d) > 0$ such that

$$(7.1) \qquad |g(re^{i\varphi_0})| < A(\varepsilon) \exp\{(\alpha+\varepsilon)r\},$$

$$(7.2) \qquad \left.\begin{cases} |g(re^{i\varphi})| > B(\varepsilon, d) \exp\{(\alpha-\varepsilon)r\,|\cos(\varphi-\varphi_0)|\} \\ |g(re^{i\varphi})| > B'(d) \exp(\beta r) \end{cases}\right\} |re^{i\varphi} - z_n| \geqslant d.$$

Let $f(z)$ be an entire function of exponential type which is bounded on the sequence $\{z_n\}$. Let U be some double-sector $|z| \geqslant 0$, $\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2$, $\varphi_1 + \pi \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 + \pi$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$. If to every $d > 0$ there exist constants $D(d) > 0$, $E(d) > 0$ such that

$$(7.3) \qquad |f(z)| < D(d) e^{-E(d)|z|}\, |g(z)|$$

for all $z \in U$ satisfying $|z - z_n| \geqslant d$, then $f(z)$ is a constant.

Remark. $\sin \pi z$ is not admissible for $g(z)$ in a theorem of this kind, of course. But $\sin \pi z$ „nearly" satisfies the above conditions for $g(z)$: take $\alpha = \pi$, $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$.

Proof. We suppose that $\varphi_0 = 0$. In (ii) we shall prove that $f(z)$ satisfies an inequality of the form (7.3) (with a fixed $E'(d) > 0$ instead of $E(d)$) on every curve C tending to infinity with some asymptotic direction ϑ, which avoids the circles $|z - z_n| < d$ $(d > 0)$. In (iii) we shall then prove that $f(z)$ is of zero type on the real axis. Finally theorem 4.1 will yield the desired result.

For (ii), (iii), (iv) we need the following estimations for $g'(z_n)$.

(i) To every $\varepsilon>0$ there exist constants $C(\varepsilon)>0$, $C'>0$ such that for $n=1,2,\ldots$

$$\tag{7.4} \begin{cases} |g'(z_n)|>C(\varepsilon)\exp\{(\alpha-\varepsilon)|z_n|\cdot|\cos(\arg z_n)|\}, \\ |g'(z_n)|>C'\exp(\beta|z_n|). \end{cases}$$

For let $d=\frac{1}{2}c$. $g(z)/(z-z^n)$ is regular and $\neq 0$ in $|z-z_n|\leqslant d$. Hence

$$|g'(z_n)|\geqslant \min_{|z-z_n|=d}|g(z)|/d.$$

The result now follows from (7.2).

(ii). Let C be a curve tending to infinity with some asymptotic direction ϑ, which avoids, for some $d>0$, the circles $|z-z_n|<d$. We determine two curves C_1, C_2 without double-points, which do not intersect, which belong to U, avoid the circles $|z-z_n|<d$ and tend to infinity with asymptotic directions ϑ_1, ϑ_2; $\vartheta_1<\vartheta<\vartheta_2$, $\vartheta_2-\vartheta_1<\pi$.

Let R be the infinite closed region (with aperture $\vartheta_2-\vartheta_1$) enclosed by C_1, C_2 and a sufficiently large circle $|z|=r>0$. We denote the zeros of $g(z)$ in R by $w_1, w_2, \ldots$, and for some η, $|\eta|<\min\{\beta, E(d)\}$, $\eta e^{i\vartheta}>0$, we form

$$\tag{7.5} h(z)=\frac{f(z)e^{\eta z}}{g(z)}-\sum_{1}^{\infty}\frac{f(w_n)e^{\eta w_n}}{g'(w_n)(z-w_n)}.$$

$h(z)$ is regular and of exponential type in R by (7.2), (7.4). By (7.3) $h(z)$ is bounded on C_1, C_2. Hence $h(z)$ is bounded in R (compare theorem 3.1). Estimating $f(z)$ on C from (7.5) we find an inequality of the form (7.3) with $|\eta|$ instead of $E(d)$. For fixed d, the same $|\eta|$ can be used for every curve C.

(iii) Let C_1', C_2' be two non-intersecting curves without double-points, which for some $d>0$ avoid the circles $|z-z_n|<d$ and tend to infinity with asymptotic directions $-\frac{1}{2}\pi+\gamma$, $\frac{1}{2}\pi-\gamma$, $0<\gamma<\min\{\frac{1}{2}\pi, \alpha^{-1}\beta, \alpha^{-1}E(d)\}$. Let R' be the infinite closed region (with aperture $<\pi$) enclosed by C_1', C_2' and a sufficiently large circle $|z|=r$. We denote the zeros of $f(z)$ in R' by $v_1, v_2, \ldots$, and we form for some $\varepsilon>0$

$$\tag{7.6} k(z)=\frac{f(z)e^{(\alpha-2\varepsilon)z}}{g(z)}-\sum_{1}^{\infty}\frac{f(v_n)e^{(\alpha-2\varepsilon)v_n}}{g'(v_n)(z-v_n)}.$$

$k(z)$ is regular and of exponential type in R' by (7.2), (7.4). Moreover $k(z)$ is bounded on C'_1, C'_2 (see the definition of γ and compare (ii)). Hence $k(z)$ is bounded in R'. Now from (7.6),

$$(7.7) \qquad f(z) = O\{|e^{-(\alpha-2\varepsilon)z}g(z)|\}$$

in R', $|z-z_n| \geqslant d$. By (7.1), if $\delta = \delta(\varepsilon)$ is sufficiently small, $g(z) = O\{|\exp\{(\alpha+2\varepsilon)z\}|\}$ in the sector $-\delta \leqslant \arg z \leqslant \delta$. Hence by (7.7), if moreover $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi - \gamma$,

$$(7.8) \qquad f(z) = O\{|e^{4\varepsilon z}|\}$$

in $-\delta \leqslant \arg z \leqslant \delta$, $|z-z_n| \geqslant d$. Since $f(z)$ is regular in R' and d can be chosen $\leqslant \frac{1}{2}c$, the restriction $|z-z_n| \geqslant d$ can be dropped here. In particular

$$(7.9) \qquad f(x) = O(e^{4\varepsilon x}), \quad (x \geqslant 0),$$

that is, $f(z)$ is of zero type on $z = x \geqslant 0$.

In the same way we prove that $f(z)$ is of zero type on $z = x \leqslant 0$.

(iv) Apply theorem 4.1.

We have as a corollary of theorem 7.1

Theorem 7.2. Let $\{z_n\}$ be a sequence of points with the property that with z_n it also contains $-z_n$. Let the z_n be distributed according to a monotonic function $k(\vartheta)$: if ϑ_1, ϑ_2 are points of continuity of $k(\vartheta)$, $(1/r)$ times the number of z_n in the sector $\vartheta_1 \leqslant \arg z < \vartheta_2$, $|z| < r$, tends to $\{k(\vartheta_2) - k(\vartheta_1)\}$ if $r \to \infty$. Let ϑ_0 be a point of continuity of $k(\vartheta)$. We suppose that $k(\vartheta)$ is not a step-function with at most one jump on $(\vartheta_0, \vartheta_0 + \pi)$. Further let for a certain $c > 0$ and for all positive integers n, m,

$$(7.9) \qquad |z_n - z_m| \geqslant c|n-m|.$$

Let $f(z)$ be an entire function of exponential type which is bounded on the sequence $\{z_n\}$. If $f(z)$ is of smaller type than

$$(7.10) \qquad \pi \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} |\sin(\varphi - \vartheta)|\, dk(\vartheta)$$

on some line $\arg z = \varphi$, $\arg z = \varphi + \pi$, $f(z)$ must be a constant.

Remark. There are (non-constant) entire functions which are of type (7.10) on every line $\arg z = \varphi$, $\arg z = \varphi + \pi$, and which are bounded on $\{z_n\}$: see $g(z)$ defined in (7.11).

Proof. Define an entire function $g(z)$ by

$$g(z) = \{\prod_1^\infty (1 - z^2/z_n^2)\}^{1/2}, \quad (g(0) = 1). \tag{7.11}$$

By (7.9) $g(z)$ is an entire function of exponential type. By theorem 3.4 it satisfies the conditions of theorem 7.1: take for a the (absolute) minimum of the types of $g(z)$ on the half-lines starting at 0, for $\beta : \frac{1}{2}a$ and for φ_0 the argument of one of the half-lines where the minimum type is attained. $a > 0$ by the requirements for $k(\vartheta)$.

As $f(z)$ is of smaller type than $g(z)$ on a certain line, $f(z)$ is of smaller type than $g(z)$ in a (closed) double-sector containing that line (compare cor. 3. 1.5). It now follows from the second inequality (3.12) that (7.3) is true for that double-sector.

Remarks. The function $g(z)$ of theorem 7.1 may for example be $z^{-k} \sin \pi\lambda_1 z \sin \pi\lambda_2 z \ldots \sin \pi\lambda_k z$, $k \geqslant 2$, not all $\arg \lambda_j$ congruent to the modulus π. More generally, $g(z)$ may be the product of $k \geqslant 2$ functions of the form considered in theorem 3.3; λ complex, not all $\arg \lambda$ congruent to the modulus π. (Compare theorem 2.4 and see also J. Korevaar [10] § 5).

It is possible to prove a result analogous to theorem 7.1 for the case that $f(z)$ satisfies a more general condition with respect to its magnitude on the sequence $\{z_n\}$.

REFERENCES

1. S. Bernstein: *Sur une propriété des fonctions entières*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 176 (1923), 1603—1605.

2. V. Bernstein: *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Paris 1933.

3. R. P. Boas Jr.: *Entire functions bounded on a line*, Duke Mathematical Journal, 6 (1940), 148—169; Correction to „Entire functions bounded on a line", Duke Mathematical Journal 13 (1946), 483—484.

4. R. P. Boas Jr.: *Entire functions of exponential type*, Bulletin of the American Mathematical Society, 48 (1942), 839—849.

5. R. P. Boas Jr. and A. C. Schaeffer: *A theorem of Cartwright*, Duke Mathematical Journal, 9 (1942), 879—883.

6. Mary L. Cartwright, *On certain integral functions of order one*, Quarterly Journal of Mathematics (Oxford series), 7 (1936), 46—55.

7. R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, *Power series with bounded coefficients*, American Journal of Mathematics, 67 (1945), 141—154.

8. V. Ganapathy Iyer, *On the order and type of integral functions bounded at a sequence of points*, Annals of Mathematics, 38 (1937), 311—320.

9. J. Korevaar: *A simple proof of a theorem of Pólya*, Simon Stevin, 26 (1948—49), 81—89.

10. J. Korevaar: *Interpolatory methods applied to functions of exponential type (Dutch, English summary)*, Report ZW 1948—018, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

11. N. Levinson: *Gap and density theorems*, American Mathematical Society Colloquium Publications nr 26, New York 1940.

12. A. J. Macintyre: *Laplace's transformation and integral functions*, Proceedings of the London Mathematical Society (2), 45 (1938—39), 1—20.

13. R. E. A. C. Paley and N. Wiener: *Fourier transforms in the complex domain*, American Mathematical Society Colloquium Publications nr 19, New York 1934.

14. A. Pfluger, *On analytic functions bounded at the lattice-points* Proceedings of the London Mathematical Society (2), 42 (1936—37), 305—315.

15. G. Pólya: *Aufgabe 105*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 40 (1931), 2-te Abteilung, 80.

16. G. Pólya and G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin 1925.

17. G. Szegö: *Lösung der Aufgabe 105*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 43 (1934), 2-te Abteilung, 10—11.

18. E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford 1947.

19. L. Tschakaloff, *Zweite Lösung der Aufgabe 105*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 43 (1934), 2-te Abteilung, 11—13.

20. J. M. Whittaker: *Interpolatory function theory*, Cambridge 1935.

Pólya's theorem 2.1 is contained in the earlier paper

21. G. Valiron, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*, Bulletin des Sciences Math. (2), 49 (1925), 181—192, 203—224.

Duffin and Schaeffer's theorem mentioned in section 2 of this paper was proved by interpolatory methods by

22. B. Levin, Doklady Akad. Nauk S. S. S. R., 65 (1949), 265—268.

Further literature on entire functions bounded on sets of points:

23. B. Kjellberg, *On certain integral and harmonic functions. A study in minimum modulus*. Thesis, Uppsala 1948 (See section 19).

24. J. Korevaar, *Approximation and interpolation applied to entire functions*. Thesis, Leiden 1949 (See part 2).

25. M. S. Macphail, *Entire function bounded on a set*, Trans. Roy. Soc. Canada, section 3, 37 (1943), 31—38.

SUR LES RACINES CARACTÉRISTIQUES ET SUR LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES DE CERTAINES MATRICES

Par Z. Szmydtówna (Kraków)

La note présente a pour but d'indiquer les démonstrations algébriques de certains théorèmes concernant les matrices dont les éléments situés à l'extérieur de la diagonale principale sont positifs ou non-négatifs. Plusieurs résultats dus à Frobenius et énoncés pour les matrices d'un type moins général seront étendus à ce type de matrices.

§ 1.

Une matrice réelle $A = \|a_{ik}\|$ dont tous les éléments, situés à l'éxtérieur de la diagonale principale sont non-négatifs c.-à-d.

$$a_{ik} \geqslant 0 \text{ lorsque } i \neq k \quad (i = 1, \ldots, n;\; k = 1, \ldots, n)$$

sera dite matrice du type α.

Une matrice réelle sera dite matrice du type α^{+} lorsque $a_{ik} > 0$ pour $i \neq k$.

En appliquant un théorème de M. Kamke relatif à l'allure des intégrales [1]) du système d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j \quad (i = 1, \ldots, n)$$

---

[1]) E. Kamke: *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Acta Math. T. 58 (p. 74 s. s.).

dont la matrice des coefficients est du type a ou a^+, M. Ważewski a obtenu quelques propriétés des racines et des directions caractéristiques de ces matrices [2]). Voici l'une d'elles:

Théorème I. La racine caractéristique de la matrice du type a dont la partie réelle est la plus grande, est réelle. Cette racine est simple lorsque la matrice est du type a^+.

M. Ważewski a posé le problème de démontrer ce théorème directement, par une voie algébrique. Or j'ai réussi à le faire, en démontrant que ce théorème peut être ramené, par un artifice bien simple, à un théorème de Frobenius.

Frobenius a considéré des matrices positives (dont *tous* les éléments sont positifs) et des matrices non-négatives (dont *tous* les éléments sont non-négatifs). Il a démontré les théorèmes suivants: L'équation caractéristique d'une matrice positive possède une racine r réelle, positive, simple et dépassant, en valeur absolue, toutes les autres racines [3]). Chaque matrice non-négative possède aussi une racine réelle. La plus grande des racines réelles est non-négative et elle n'est pas surpassée en valeur absolue par aucune autre racine [4]).

Pour la démonstration du théorème I fixons l'attention sur une matrice arbitraire du type a

$$A = \|a_{ik}\| \quad (i=1,\dots,n;\ k=1,\dots\ n).$$

Soit m un nombre réel, tel que

$$m + a_{ii} \geqslant 0 \text{ pour } i=1,\dots,n.$$

La matrice $A+mE$, où E désigne la matrice-unité, est non-négative. Entre les racines caractéristiques de la matrice A et celles de la matrice $A+mE$ il subsiste la rélation suivante: $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ étant les racines caractéristiques de la matrice $A+mE$ (elles peuvent être égales entre elles), $\sigma_1 - m,\dots,\sigma_n - m$ le sont pour la matrice A.

---

[2]) Ces résultats ont été communiqués (oralement) le 19 et 26 février 1946 au cours d'une séance de la Soc. Pol. de Math. à Cracovie.

[3]) G. Frobenius: *Über Matrizen aus positiven Elementen*, Berlin Sitzb. 1908, p. 471—473 et 1909 p. 515.

[4]) G. Frobenius: *Über Matrizen aus positiven Elementen*, Berlin Sitzb. 1908 p. 475—476.

D'après le théorème de FROBENIUS la plus grande racine réelle de la matrice $A+mE$ est non-négative, et comme elle possède la plus grande valeur absolue (au sens large), sa partie réelle est la plus grande possible. Il n'est pas exclu qu'elle soit multiple. En la désignant par r, on voit immédiatement que $\varrho = r - m$ sera une racine caractéristique de la matrice A dont la partie réelle est la plus grande. ϱ et r sont simultanément simples ou multiples.

§ 2.

Je passe maintenant aux autres théorèmes de M. WAŻEWSKI démontrés au moyen des considérations puisées dans la théorie des équations différentielles.

Théorème II. Les coordonnées de chaque direction caractéristique, appartenant à la plus grande racine réelle ϱ de la matrice A du type α sont toutes non-négatives ou toutes non-positives. Cela veut dire que le système

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \varrho x_i \quad (i=1,\ldots,n)$$

ne peut posséder aucune solution $(x_1,\ldots,x_n)$, telle que pour une certaine couple d'indices i et j, on ait $x_i x_j < 0$. Dans le cas de matrices du type α^+ les coordonnées de la direction caractéristique en question sont toutes positives ou toutes négatives.

Théorème III. Les composantes de la direction caractéristique correspondant à la racine réelle $\sigma < \varrho$ de la matrice du type α ne peuvent pas être toutes positives.

Or ces théorèmes peuvent aussi être démontrés par une voie algébrique. Il est notamment aisé de remarquer que les théorèmes II et III indiqués par FROBENIUS [5]) pour les matrices positives ou non-négatives s'appliquent presque sans aucune modification au cas des matrices du type α^+ ou du type α.

---

[5]) G. Frobenius: *Über Matrizen aus positiven Elementen II*, Berlin Sitzb. 1909, p. 514.

M. Ważewski a prouvé encore un théorème qui n'a pas de correspondant parmi les théorèmes de Frobenius. Il concerne les directions caractéristiques appartenant aux racines essentiellement complexes de la matrice du type α. Je vais le formuler un peu différemment que ne l'a fait M. Ważewski à savoir de façon que ce théorème englobe aussi le théorème III.

Théorème IV. Désignons par P et N les ensembles des points $(y_1, \dots, y_n)$ pour lesquels on a respectivement

$$y_i \geqslant 0 \quad (i=1,\dots,n) \quad \text{(ensemble } P)$$
$$y_i \leqslant 0 \quad (i=1,\dots,n) \quad \text{(ensemble } N).$$

Soit $s=\sigma+i\tau$ la racine caractéristique de la matrice A du type α, différente de ϱ (où ϱ est la plus grande racine réelle) et soient $\eta_j=\beta_j+i\gamma_j$ $(j=1,\dots,n)$ les coordonnées d'une direction caractéristique qui correspond à s.

Dans cette hypothèse l'ensemble plan dont les équations paramétriques sont

$$\xi_j=\beta_j u+\gamma_j v \quad (j=1,\dots,n) \tag{1}$$

n'a aucun point commun avec l'intérieur de l'ensemble $P+N$ [6]). Si la matrice est du type α^+ la partie commune de l'ensemble (1) avec $P+N$ se réduit au point $(0,\dots,0)$ correspondant aux valeurs $u=v=0$ [7]).

Démonstration. Supposons que la matrice A soit du type α. Désignons par $(\delta_1,\dots,\delta_n)$ une direction caractéristique de la matrice transposée A^* (aussi du type α) appartenant à la racine ϱ. (Les racines caractéristiques des matrices A et A^* sont les mêmes). D'après le théorème II

$$\begin{aligned} &\delta_j \geqslant 0 \quad (j=1,\dots,n) \quad \sum_{j=1}^{n}(\delta_j)^2>0 \\ \text{ou bien} \quad &\delta_j \leqslant 0 \quad (j=1,\dots,n) \quad \sum_{j=1}^{n}(\delta_j)^2>0. \end{aligned} \tag{2}$$

---

[6]) L'équation (1) représente un plan à deux dimensions quand s est une racine essentiellement complexe ($\tau \neq 0$) et une droite lorsque s est une racine réelle.

[7]) Nous posons $v=0$ lorsque $\tau=0$.

On vérifie facilement, en vertu des hypothèses faites sur s et ϱ que

(3) $$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \delta_j = 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \delta_j = 0.$$

On a donc pour chaque couple (u, v)

(4) $$\sum_{j=1}^{n} \xi_j \delta_j = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j u + \gamma_j v) \delta_j = 0.$$

Les rélations (2) et (4) excluent la possibilité d'existence des valeurs (u, v) telles que

$$\xi_j = \beta_j u + \gamma_j v > 0 \text{ pour } j = 1, \dots, n$$

et telles que $\xi_j = \beta_j u + \gamma_j v < 0$ pour $j = 1, \dots, n$.

Comme les ξ_j ne peuvent devenir à la fois positives ni à la fois négatives pour aucune couple de valeurs (u, v) l'ensemble répresenté par (1) ne peut donc contenir aucun point intérieur de l'ensemble $P + N$.

Passons maintenant au cas, où la matrice A est du type α^+. Supposons que l'on ait pour une couple (u, v) à la fois

(5) $$\xi_j = \beta_j u + \gamma_j v \geqslant 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

ou bien à la fois

(5′) $$\xi_j = \beta_j u + \gamma_j v \leqslant 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

La matrice A étant du type α^+ on a ou bien à la fois

$$\delta_j > 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

ou bien à la fois

$$\delta_j < 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

On voit donc que le système de relations (4) et (5), ou (4) et (5′) est équivalent à celui de n relations

$$\xi_j = \beta_j u + \gamma_j v = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

d'où l'on obtient $u = 0$ dans le cas d'une racine réelle (car $\gamma_j = 0$ pour $j = 1, \dots, n$ et $\sum_{j=1}^{n} (\beta_j)^2 > 0$) et $u = v = 0$ lorsque la racine s est essentiellement complexe (car le rang de la matrice $\begin{Vmatrix} \beta_1, \dots, \beta_n \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n \end{Vmatrix}$ est alors égal à 2). En vertu de la convention [7]) le théorème IV se trouve ainsi démontré.

§ 3.

Outre les deux théorèmes de FROBENIUS dont les corrélatifs pour les matrices du type α ou α^+ sont les théorèmes II et III, il y en a encore plusieurs [8]), dans les démonstrations desquels les signes des éléments situés sur la diagonale principale n'interviennent pas. Cette remarque nous fournit de nouveaux théorèmes sur les matrices des types α et α^+. Je me borne à n'en indiquer que deux exemples relatifs à des matrices du type α^+.

Théorème V [9]). La plus grande racine caractéristique réelle de la matrice $A=\|a_{ik}\|$ est la seule racine caractéristique réelle de cette matrice supérieure à la plus grande racine réelle de l'équation $A_{jj}(s)=0$, où $A_{ik}(s)$ désigne le complément algébrique de l'élément du déterminant $|sE-A|$, appartenant à la i-ème ligne et k-ème colonne.

Théorème VI [10]). L'équation $\varphi^{(p)}(s)=0$ où $\varphi^{(p)}(s)$ désigne la dérivée d'ordre p du polynôme $\varphi(s)=|sE-A|$, possède une racine réelle. La plus grande de ces racines réelles, que nous allons désigner par ϱ_p est simple. On a $\varphi^{(p-1)}(\varrho_p)<0$ et pour $s>\varrho_p$: $A_{ik}^{(p)}(s)>0$ [11]). Les plus grandes racines réelles des dérivées successives du polynôme $\varphi(s)$ forment une suite décroissante:

$$\varrho_0>\varrho_1>\ldots>\varrho_{p-1}.$$

---

8) Voir G. Frobenius, les mémoires cités sous 3).

9) G. Frobenius: loc. cit. 1908, p. 473.

10) G. Frobenius: loc. cit. 1909, p. 517.

11) Cf. la notation du théorème V.

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE FATOU

Par S. Łojasiewicz (Kraków)

Notations. Soit K le cercle $|z|<1$, C la circonférence $|z|=1$ et $\overline{K}=K+C$.

Théorème de Fatou. Toute fonction $f(z)$ holomorphe bornée dans K possède en chaque point ζ_0 de C, sauf un ensemble de mesure nulle, la limite

(1) $\lim\limits_{z\to\zeta_0} f(z)$ pour $z\to\zeta_0$ de façon que $\dfrac{|\zeta_0-z|}{1-|z|}$ reste borné.

La démonstration sera appuyée sur deux théorèmes connus suivants:

Théorème de Lebesgue. Toute fonction $\varphi(x)$ définie dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$ remplissant la condition $|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|\leqslant \leqslant M\cdot|x_2-x_1|$ pour chaque x_1 et $x_2\in\langle a,b\rangle$, où M est une constante, possède la dérivée finie $\varphi'(x)$ presque partout dans $\langle a,b\rangle$.

Théorème de Schwarz. G étant un domaine symétrique par rapport à C, toute fonction $u(z)$ harmonique dans $K\cdot G$, continue dans $\overline{K}\cdot G$ et nulle sur $C\cdot G$, peut être prolongée au domaine entier G de façon que $u(z)=-u(1/|\overline{z}|)$.

Lemme I. Toute fonction $g(z)$ holomorphe bornée dans K, continue dans $\overline{K}$ excepté un point ζ_0 de C et continue sur C, reste continue dans $\overline{K}$ (le point ζ_0 y compris).

Démonstration. Posons dans $\overline{K}$ $g=u+iv$, u et v étant deux fonctions réelles harmoniques dans K. Comme u est continue sur C il existe une fonction u^* harmonique dans K, continue dans $\overline{K}$ et telle que $u^*=u$ sur C. La fonction $h=u^*-u$ est harmonique dans K, continue dans $\overline{K}$ excepté le point ζ_0 et nulle sur C, donc en vertu du théorème de SCHWARZ elle peut être prolongée sur un voisinage $0<|z-\zeta_0|<\varepsilon$. Mais, h étant bornée car u et u^* sont bornées, il existe la limite $\lim\limits_{z\to\zeta_0} h(z)$, donc u est continue en ζ_0. Pareillement v est continue en ζ_0, c. q. f. d.

Lemme II. Soit $g(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine G possédant une limite finie en un point frontière ζ_0 de G et $\varrho(z)$ la distance du point z à la frontière de G. Alors $(z-\zeta_0)\cdot g'(z)\to 0$ pour $z\to\zeta_0$ de façon que $\dfrac{|\zeta_0-z|}{\varrho(z)}$ reste borné.

Démonstration. Posons $A=\lim\limits_{z\to\zeta_0} g(z)$, désignons par C_z la circonférence $|\zeta-z|=\dfrac{\varrho(z)}{2}$ et soit $\eta(z)=\max\limits_{C_z}|g(\zeta)-A|$. Pour chaque $z\in G$ on a

$$g'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_z}\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_z}\frac{g(\zeta)-A}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\,,$$

d'où il vient

$$|g'(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\pi\varrho(z)\cdot\frac{\eta(z)}{[\frac{1}{2}\varrho(z)]^2}=2\frac{\eta(z)}{\varrho(z)}$$

et par suite $|(z-\zeta_0)\,g'(z)|\leqslant 2\dfrac{|z-\zeta_0|}{\varrho(z)}\cdot\eta(z)$, ce qui entraîne la thèse car $\lim\limits_{z\to\zeta_0}\eta(z)=0$.

Démonstration du théorème de Fatou. Soit $|f(z)|\leqslant M$ dans K et $F(z)$ une fonction primitive de $f(z)$. Puisque

(2) $$|F(z_2)-F(z_1)|=\left|\int\limits_{z_1}^{z_2}f(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant|z_2-z_1|\cdot M \text{ lorsque } z_1 \text{ et } z_2\in K,$$

la fonction $F(z)$ peut être définie sur C de façon qu'elle reste continue dans $\overline{K}$; alors l'inégalité (2) subsiste lorsque z_1 et $z_2 \in \overline{K}$. En posant $\varphi(\vartheta) = F(e^{i\vartheta})$ on a

$$|\varphi(\vartheta_2) - \varphi(\vartheta_1)| \leqslant |e^{i\vartheta_2} - e^{i\vartheta_1}| \cdot M \leqslant |\vartheta_2 - \vartheta_1| \cdot M,$$

donc d'après le théorème de LEBESGUE la limite finie

$$\lim_{\vartheta \to \vartheta_0} \frac{\varphi(\vartheta) - \varphi(\vartheta_0)}{\vartheta - \vartheta_0} \tag{3}$$

existe presque partout dans $\langle 0, 2\pi \rangle$. Soit ϑ_0 un nombre tel que la limite (3) existe; posons $\zeta_0 = e^{i\vartheta_0}$. Il suffit de démontrer que la limite (1) existe. A cet effet observons que, d'après (3), le quotient $\dfrac{F(\zeta) - F(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0}$ tend vers une limite finie A lorsque ζ tend vers ζ_0 en restant sur C. Par suite la fonction $g(z)$ définie dans $\overline{K}$ par les formules

$$g(z) = \frac{F(z) - (F_0)}{z - \zeta_0} \quad \text{pour} \quad z \neq \zeta_0 \quad \text{et} \quad g(\zeta_0) = A \tag{4}$$

satisfait aux hypothèses du lemme I, donc il existe la limite

$$\lim_{z \to \zeta_0} g(z) = A. \tag{5}$$

Il en résulte d'après le lemme II que

$$(z - \zeta_0) \cdot g'(z) \to 0 \text{ pour } z \to \zeta_0 \text{ de façon que } \frac{|\zeta_0 - z|}{1 - |z|} \text{ reste borné.} \tag{6}$$

Mais, d'après (4) on a $F(z) = F(\zeta_0) + (z - \zeta_0) \cdot g(z)$ dans K et par suite $f(z) = F'(z) = g(z) + (z - \zeta_0) \cdot g'(z)$, donc d'après (5) et (6) la limite (1) existe, c. q. f. d.

Remarque. Le lemme I est un cas particulier du théorème suivant de LINDELÖF[1]) (la démonstration de ce théorème est simple et n'exige pas la considération des fonctions harmoniques):

---

[1]) E. Lindelöf: *Sur un principe général de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme*, Acta Soc. Scient. Fennicae, tom XLI, No 4, p. 9—10.

Soit G l'intérieur d'un contour de Jordan C. Toute fonction holomorphe bornée dans G, continue dans $G+C$ excepté un point ζ_0 de C et continue sur C, reste continue dans $G+C$ (le point ζ_0 y compris).

En appliquant ce théorème on démontre (par la même voie que plus haut) la suivante généralisation du théorème de FATOU:

Soit C un contour rectifiable de Jordan, G son intérieur et $\varrho(z)$ la distance du point z à C. Toute fonction $f(z)$ holomorphe bornée dans G possède en chaque point ζ_0 de C, sauf un ensemble de mesure nulle, la limite $\lim\limits_{z\to\zeta_0} f(z)$ lorsque $z\to\zeta_0$ de façon que le quotient $\dfrac{|\zeta_0-z|}{\varrho(z)}$ reste borné.

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS HOMOGÈNES ET LES SÉRIES DE TAYLOR DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Par F. Leja (Kraków)

1. Notations. Désignons par S l'espace de deux variables complexes x et y. Les points de S seront désignés par $p, q, r, \ldots$, l'origine des coordonnées par la lettre o, le point variable dans S par u et les coordonnées de u par x, y.

Soient p et q deux points des coordonnées x_1, y_1 et x_2, y_2 respectivement et λ un nombre complexe quelconque. Je désignerai par

$$\lambda \cdot p$$

le point des coordonnées $\lambda x_1, \lambda x_2$, par $p+q$ le point des coordonnées x_1+x_2, y_1+y_2, par $p-q$ le point $p+(-1)\cdot q$ et par pq l'expression

$$pq = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2). \tag{1}$$

La valeur absolue de cette expression

$$|pq| = \tfrac{1}{2}|x_1 y_2 - y_1 y_2|$$

sera dite *distance triangulaire* des point p et q.

Observons que $|pp|=0$ et que la distance $|pq|$ peut s'annuler aussi dans le cas où $p \neq q$. Pour qu'on ait $|pq|=0$ il faut et il suffit que les points p et q soient situés dans un même *plan analytique* passant par o; un tel plan est défini par une seule équation de la forme

$$\beta x - \alpha y = 0$$

où α et β sont des nombres complexes ne s'annulant pas en même temps. Par chaque point $p \neq o$ passe un et un seul plan

analytique passant par o. Un point q est situé dans ce dernier plan si $q=\lambda\cdot p$, où λ est un nombre complexe.

Soit $u(t)$ une fonction définie dans l'intervalle réel $0\leqslant t\leqslant 1$ dont les valeurs sont des points de S. Lorsque le point $u(t)$ varie continûment avec t l'équation

$$u=u(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

représente un arc dans l'espace S. Le segment rectilique joignant deux points différents p et q peut être représenté par l'équation

$$u=p+(q-p)t, \qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Soient $p_0, p_1, \dots, p_n$ des points quelconques de S. Formons les distances triangulaires $|p_j p_k|$, $j\neq k$, et désignons par $V(p_0, \dots, p_n)$ le produit

$$V(p_0, \dots, p_n) = \prod_{0\leqslant j<k\leqslant n} |p_j p_k| \tag{2}$$

et par $\theta^{(j)}(p_0, \dots, p_n)$ le produit

$$\theta^{(j)}(p_0, \dots, p) = \prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n} |p_j p_k|, \qquad j=0,1,\dots,n. \tag{3}$$

Ces quantités satisfont aux relations

$$V(p_0, \dots, p_n) = \theta^{(j)}(p_0, \dots, p_n)\cdot V(p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n), \qquad j=0,1,\dots,n, \tag{4}$$

dont je me servirai dans la suite.

2. Écart d'un ensemble [1]). Soit E un ensemble borné et fermé de points de l'espace S et

$$p_0, p_1, \dots, p_n \tag{5}$$

un système de $n+1$ points quelconques de E. Formons les $n+1$ produits (3) et désignons par $\theta_n(E)$ la borne supérieure du plus petit de ces produits lorsque n étant fixe les points (5) varient dans E

$$\theta_n(E) = \sup_{(p_k\in E)} \{\min_{(j)} \theta^{(j)}(p_0, \dots, p_n)\} \qquad n=1,2,\dots \tag{6}$$

---

[1]) Je rappele les définitions de quelques notions introduites autrefois et quelques résultats antérieurs [Ann. de l'Acad. des Sc. Techniques, Varsovie, t. 7 (1939—1945), p. 1—9] pour faciliter la lecture du travail présent.

Il est clair que les bornes $\theta_1(E)$, $\theta_2(E)$,... sont nonnégatives et finies; on démontre[2]) qu'elles satisfont aux relations

(7) $$\theta_{\mu+\nu}(E) \leqslant \theta_\mu(E) \cdot \theta_\nu(E), \qquad \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots,$$

ce qui entraîne l'existence de la limite finie

$$\theta(E) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\theta_n(E)}$$

dite *écart* de l'ensemble E par rapport à l'origine des coordonnées.

L'écart est une fonction nonnégative et monotone d'ensemble

$$0 \leqslant \theta(E) \leqslant \theta(E') \qquad \text{si } E \subset E'.$$

On constate aisément qu'il ne change pas lorsqu'on fait rôtir E autour de l'origine des coordonnées[3]). Observons encore que, si E est contenu dans un seul plan analytique passant par o, tous les produits (3) s'annulent, donc $\theta(E) = 0$. Pareillement $\theta(E) = 0$ si E est dénombrable[4]) ou si E est contenu dans une infinité dénombrable des plans analytiques passant par o. Neanmoins:

$\theta(E)$ est positif lorsque E contient un arc C arbitrairement petit ne passant pas par o et joignant deux points p et q de distance triangulaire positive.

En effet, supposons d'abord que C se réduise au segment rectiligne

$$u = p + (q - p) \cdot t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

et désignons ce segment par Γ. Les points

(8) $$p = p_0, p_1, \ldots, p_n = q, \qquad \text{où } p_k = p + (q - p)\frac{k}{n},$$

partagent Γ en n segments égaux et on a

$$|p_j p_k| = |j - k| \cdot \frac{|pq|}{n}$$

---

[2]) V. ce journal t. 12 (année 1933), p. 29—34.

[3]) La rotation étant définie par les formules: $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$, où α est un nombre complexe quelconque.

[4]) Comme le *diamètre transfini* de E introduit par M. Fekete [Math. Z. t. 32 (1930), p. 108—114].

d'où il résulte que

$$\theta^{(j)}(p_0, \dots, p_n) = j!\,(n-j)!\left(\frac{|pq|}{n}\right)^n.$$

Puisque $k! > e^{-k} \cdot k^k$ d'après la formule de STIRLING et que par suite

$$j!\,(n-j)! > e^{-n} \cdot j^j \cdot (n-j)^{n-j} > e^{-n}\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

on a

$$\theta_n(\Gamma) \geqslant \min_{(j)} \theta^{(j)}(p_0, \dots, p_n) > \left(\frac{|pq|}{2e}\right)^n$$

donc l'écart de Γ n'est pas plus petit que le nombre positif $|pq| : 2e$ [5]).

Lorsque l'arc C est quelconque (mais ne passant pas par o) observons qu'il rencontre chaque plan analytique passant par o et par un point quelconque de Γ. Soit p_k' le point commun (ou un de ces points s'il y en a plusieurs) de l'arc C et du plan analytique passant par o et par le point p_k du système (8). On peut représenter p_k' par le produit

$$p_k' = \lambda_k \cdot p_k$$

où λ_k est un nombre complexe. Le module de λ_k surpasse un nombre positif c ne dépendant ni de n ni de k, ce qui résulte du fait que C ne passe pas par o, donc

$$|p_k' p_k'| = |\lambda_j| \cdot |\lambda_k| \cdot |p_j p_k| \geqslant c^2 \cdot |p_j p_k|$$

pour j et $k = 0, 1, \dots, n$. Cette inégalité prouve que $\theta_n(C) \geqslant c^2 \cdot \theta_n(\Gamma)$ et par suite

$$\theta(C) \geqslant c^2 \cdot \frac{|pq|}{2e} > 0.$$

Remarques. 1. Quel que soit E on a

$$\theta(E) \leqslant \sqrt[n]{\theta_n(E)} \qquad \text{pour } n = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

car d'après (7) on a pour $k = 1, 2, \dots$ $\theta_{kn}(E) \leqslant [\theta_n(E)]^k$ donc

$$\sqrt[kn]{\theta_{kn}(E)} \leqslant \sqrt[n]{\theta_n(E)}$$

et, lorsque $k \to \infty$, le premier membre tend vers $\theta(E)$.

---

[5]) La valeur précise de $\theta(\Gamma)$ est égal à $\frac{1}{4} \cdot |pq|$.

2. Désignons par M le maximum des modules des coordonnées x, y de tous les points de E, par V_ϱ le domaine $\{|x|<\varrho,\ |y|<\varrho\}$, où $\varrho>0$, et posons

$$E=e_\varrho+E_\varrho,$$

où e_ϱ est la partie de E contenue dans V_ϱ et $E_\varrho=E-e_\varrho$. Je dis que

$$\theta(E)=\theta(E_\varrho) \qquad \text{lorsque } \varrho<\frac{\theta(E)}{M}. \tag{10}$$

En effet, soit $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ un système de $n+1$ points de E pour lequel $\theta_n(E)=\min\limits_{(j)} \theta^{(j)}(q_0,\dots,q_n)$. Un tel système existe car E est compact. Tous les points de ce système appartiennent à E_ϱ car si, par exemple, q_0 appartenait à e_ϱ on aurait, en désignant par x_k, y_k les coordonnées de q_k,

$$|q_0 q_k|=\tfrac{1}{2}|x_0 y_k-y_0 x_k|\leqslant \tfrac{1}{2}\cdot\varrho\cdot 2M<\theta(E)$$

donc $\theta^{(0)}(q_0,\dots,q_n)<[\theta(E)]^n$ et par suite

$$\sqrt[n]{\theta_n(E)}\leqslant\sqrt[n]{\theta^{(0)}(q_0,\dots,q_n)}<\theta(E),$$

ce qui est incompatible avec l'inégalité (9). On voit donc que:

La partie de E contenue dans le voisinage suffisamment petit de l'origine des coordonnées n'a aucune influence sur la grandeur de l'écart $\theta(E)$.

3. Une suite de fonctions extrémales. Supposons que, quel que soit $n=1,2,\dots$, l'ensemble E contienne un système de $n+1$ points

$$p_0, p_1, \dots, p_n \qquad \text{pour lesquels } |p_j p_k|>0 \text{ si } j\neq k \tag{11}$$

et soient x_k, y_k les coordonnées du point p_k pour $k=0,1,\dots,n$ et x,y celles du point variable u. Les $n+1$ produits

$$T^{(j)}(u;p_0,\dots,p_n)=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}\frac{up_k}{p_jp_k}=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}\frac{xy_k-yx_k}{x_jy_k-y_jx_k},\ j=0,1,\dots,n, \tag{11'}$$

sont des polynomes homogènes des variables x et y.

Désignons par $T_n(u;E)$ la borne inférieure du plus grand des modules $|T^{(j)}(u;p_0,\ldots,p_n)|$, $j=0,1,\ldots,n$, lorsque — le point u et le nombre n étant fixes — les points (11) varient dans E

$$T_n(u;E)=\inf_{(p_i\in E)}\{\max_{(j)}|T^{(j)}(u;p_0,\ldots,p_n)|\},\quad n=1,2,\ldots. \tag{12}$$

Lorsque l'ensemble E est fixé, la borne $T_n(u,E)$ sera désignée plus brièvement par

$$T_n(u).$$

C'est une fonction nonnégative définie dans l'espace entier S.

Il est évident que $T_n(u)=0$ au point $u=o$ pour $n=1,2,\ldots$. Lorsque $u\neq o$ on a

$$T_n(u)>0 \qquad \text{pour } n=1,2,\ldots$$

car, quel que soit le point u des coordonnées x,y, on a

$$x^{n-k}y^k=\sum_{j=0}^{n}x_j^{n-k}y_j^k\cdot T^{(j)}(u;p_0,\ldots,p_n)\qquad \text{pour } k=0,1,\ldots,n$$

donc, si l'on désigne par M le maximum des modules $|x_j|,|y_j|$ des coordonnées de tous les points de E on aura

$$|x^{n-k}y^k|\leqslant(n+1)M^n\cdot\max_{(j)}|T^{(j)}(u;p_0,\ldots,p_n)|,\qquad k=0,1,\ldots,n.$$

En faisant varier les points $p_0,p_1,\ldots,p_n$ dans E on en déduit les inégalités

$$|x^{n-k}y^k|\leqslant(n+1)M^n\cdot T_n(u),\qquad k=0,1,\ldots,n, \tag{13}$$

et celles-ci prouvent que $T_n(u)$ est positif si $u\neq o$. — Je dis que:

Les fonctions extrémales (12) *satisfont quel que soit* u *aux inégalités*

$$T_{\mu+\nu}(u)\geqslant T_\mu(u)\cdot T_\nu(u)\quad \text{pour } \mu \text{ et } \nu=1,2,\ldots \tag{14}$$

Démonstration. Soit u un point fixe quelconque de l'espace S et μ et ν deux nombres naturels fixes. À chaque $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un système de $\mu+\nu+1$ points de E

$$q_0,\ldots,q_\mu,q_{\mu+1},\ldots,q_{\mu+\nu} \tag{15}$$

tels qu'on ait

$$T_{\mu+\nu}(u)>\max_{(j)}|T^{(j)}(u;q_0,\ldots,q_{\mu+\nu})|-\varepsilon. \tag{16}$$

Formons le produit $V(u, q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_\nu})$, où les points $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_\nu}$ appartiennent au système (15), et cherchons son maximum lorsque (u étant toujours fixe) les points $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_\nu}$ parcourent le système (15). On peut supposer que ce maximum soit égal au produit $V(u, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu})$ donc on a, en particulier,

$$(17)\qquad V(u, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu}) \geqslant V(u, q_j, q_{\mu+1}, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_{\mu+\nu})$$

pour $j = 0, 1, \dots, \mu$ et $k = \mu+1,\ \mu+2, \dots, \mu+\nu$.

Désignons par $\theta(u; p_1, p_2, \dots, p_n)$ le produit $|up_1|\cdot|up_2|\dots|up_n|$ où les p_i sont des points quelconques. Dans cette notation le produit $\theta(p_j; p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n)$ est égal au produit (3). En tenant compte des relations (4) on déduit de (17) l'inégalité

$$\frac{\theta(u; q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu})}{\theta(q_j; q_{\mu+1}, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_{\mu+\nu})} \geqslant \frac{\theta(u; q_j, q_{\mu+1}, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_{\mu+\nu})}{\theta(q_k; q_{\mu+1}, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_{\mu+\nu})}$$

qui entraîne la suivante

$$|T^{(j)}(u; q_j, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu})| \geqslant |T^{(k)}(u; q_j, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu})|.$$

La dernière inégalité a lieu pour chaque $j = 0, 1, \dots, \mu$ et chaque $k = j,\ \mu+1,\ \mu+2, \dots, \mu+\nu$ et comme

$$\max_{(k)} |T^{(k)}(u; q_j, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu})| \geqslant T_\nu(u)$$

on a

$$(18)\qquad |T^{(j)}(u; q_j, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu})| \geqslant T_\nu(u) \qquad \text{pour } j = 0, 1, \dots, \mu.$$

Observons maintenant que quel, que soit $j = 0, 1, \dots, \mu$, on a l'égalité

$$T^{(j)}(u; q_0, \dots, q_{\mu+\nu}) = T^{(j)}(u; q_0, \dots, q_\mu) \cdot T^{(j)}(u; q_j q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu})$$

donc d'après (16) et (18)

$$T_{\mu+\nu}(u) \geqslant |T^{(j)}(u; q_0, \dots, q_\mu)| \cdot T_\nu(u) - \varepsilon, \qquad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n$$

et par suite

$$T_{\mu+\nu}(u) \geqslant \{\max_{(j)} |T^{(j)}(u; q_0, \dots, q_\mu)|\} \cdot T_\nu(u) - \varepsilon \geqslant T_\mu(u) \cdot T_\nu(u) - \varepsilon$$

ce qui entraîne l'inégalité (14) car ε est arbitrairement petit.

4. Une fonction limite liée à l'ensemble. Les fonctions extrémales (12) jouissent de la propriété suivante:

Si l'ecart $\theta(E)$ est positif la suite $\{\sqrt[n]{(T_n u;E)}\}$ tend en chaque point de l'espace S vers une limite finie

$$t(u;E)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{T_n(u;E)}. \tag{19}$$

Démonstration. Au point $u=o$ la limite (19) existe et on a $t(o;E)=0$ car $T_n(o;E)=0$ pour $n=1,2,\ldots$. Lorsque $u\neq o$ on a vu que $T_n(u;E)>0$ donc l'existence de la limite (19), finie ou infinie, résulte des inégalités (14) et du lemme connu suivant:

Si une suite de nombres positifs $a_1,a_2,a_3,\ldots$ remplit les conditions: $a_{\mu+\nu}\geqslant a_\mu\cdot a_\nu$ pour μ et $\nu=1,2,\ldots$, la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ tend vers une limite finie ou infinie.

Il reste à prouver que la limite (19) est finie quel que soit u. Pour ce but désignons par $\Delta(u,E)=\Delta(u)$ la borne supérieure des distances triangulaires $|up|$ lorsque u étant fixe le point p parcourt E et soit $\{q_0,q_1,\ldots,q_n\}$ un système de $n+1$ points de E pour lesquels

$$\min_{(j)}\theta^{(j)}(q_0,\ldots,q_n)=\theta(E).$$

D'après (12) on a

$$T_n(u;E)\leqslant\max_{(j)}\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}\left|\frac{uq_k}{q_jq_k}\right|\leqslant\frac{[\Delta(u)]^n}{\theta_n(E)}$$

donc d'après (9)

$$\sqrt[n]{T_n(u;E)}\leqslant\frac{\Delta(u)}{\theta(E)}\qquad n=1,2,\ldots \tag{20}$$

ce qui prouve que la limite (19) est finie.

Remarque 1. Appelons *frontière* de E par rapport au point o et désignons par

$$E^o$$

le sousensemble de E ne contenant que tous ceux des points $p\in E$ qui sont différents du point o et tels qu'aucun point $\lambda\cdot p$,

où $p \in E$ et λ est un nombre complexe de module $|\lambda| > 1$, n'appartient à E.

Observons que si l'on remplace dans les produits

$$\theta^{(j)}(p_0, \dots, p_n) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} |p_j p_n|, \quad |T^{(j)}(u, p_0, \dots, p_n)| = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \left| \frac{u p_k}{p_j p_k} \right|$$

le point p_ν, où $0 \leqslant \nu \leqslant n$, par le point $\lambda \cdot p_\nu$, où λ est un nombre complexe différent de zéro, alors:

1° $\theta^{(j)}(p_0, \dots, p_n)$ se multiplie par $|\lambda|^n$ lorsque $j = \nu$ et par $|\lambda|$ lorsque $j \neq \nu$,

2° $|T^{(j)}(u; p_0, \dots, p_n)|$ se multiplie par $|\lambda|^{-n}$ lorsque $j = \nu$ et il ne change pas lorsque $j \neq \nu$.

En tenant compte de ces propriétés on constate que les bornes (6) et (12) ne changent pas lorsqu'on remplace l'ensemble E par le sousensemble E^0 de E et par suite

$$\theta_n(E) = \theta_n(E^0) \quad \text{et} \quad T_n(u; E) = T_n(u; E^0) \qquad \text{pour } n = 1, 2, \dots,$$

ce qui prouve que

$$\theta(E) = \theta(E^0) \quad \text{et} \quad t(u; E) = t(u; E^0).$$

Remarque 2. Lorsque $\theta(E) = 0$ la limite (19) ne cesse pas exister car les inégalités (14) restent vraies, mais dans ce cas la limite (19) peut être infinie en dehors de E.

En effet, désignons par $\delta(u, E) = \delta(u)$ la distance triangulaire du point u à l'ensemble E, c'est-à-dire la borne inférieure des distances $|up|$ lorsque p parcourt E, et soit u_0 un point de E pour lequel $\delta(u_0) > 0$. Il est clair que $u_0 \neq o$ donc $T_n(u_0) > 0$ pour $n = 1, 2, \dots$ et par suite il existe un système de points $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ de E pour lesquels

$$T_n(u_0) \geqslant \tfrac{1}{2} \{ \max_{(j)} |T^{(j)}(u_0; q_0, \dots, q_n)| \}.$$

Puisque $|u_0 q_k| \geqslant \delta(u_0)$ pour $k = 0, 1, \dots, n$ et que

$$\max_{(j)} |T^{(j)}(u_0; q_0, \dots, q_n)| = \max_{(j)} \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \left| \frac{u_0 q_k}{q_j q_k} \right| \geqslant \frac{[\delta(u_0)]^n}{\min\limits_{(j)} \theta^{(j)}(q_0, \dots, q_n)},$$

$$\min_{(j)} \theta^{(j)}(q_0, \dots, q_n) \leqslant \theta_n(E),$$

on a $T_n(u_0) \geqslant [\delta(u_0)]^n : 2\theta_n(E)$ donc, étant $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\theta_n(E)} = 0$, on voit que

$$t(u_0; E) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{T_n(u_0; E)} = \infty.$$

5. Quelques propriétés de la fonction $t(u; E)$. Supposons que $\theta(E) > 0$ donc $t(u;E)$ est fini quel que soit u. Il est clair que

$$t(u; E) \leqslant t(u; E') \qquad \text{si } E \supset E'.$$

Lorsque E est fixé la fonction $t(u;E)$ sera désignée plus brièvement par $t(u)$ ou par $t(x, y)$. Je dis que:

1° *$t(u) = 0$ si $u = o$; $t(u) > 0$ si $u \neq o$ et*

$$t(u) \leqslant 1 \qquad si\ u \in E.$$

En effet, $t(o) = 0$ car $T_n(o) = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$ D'après (13) on a quel que soit u

$$T_n(u) \geqslant \frac{1}{n+1} \frac{|x|^n}{M^n} \quad \text{et} \quad T_n(u) \geqslant \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{|y|^n}{M^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

donc

$$(21) \qquad t(u) \geqslant \frac{|x|}{M} \quad \text{et} \quad t(u) \geqslant \frac{|y|}{M}$$

et par suite $t(u) > 0$ si $u \neq o$.

Lorsque $u \in E$ choisissons dans E un système de $n+1$ points $p_0, p_1, \ldots, p_n$, où $p_0 = u$ et $|p_j p_k| > 0$ pour $j \neq k$. Alors

$$T^{(0)}(u; p_0, \ldots, p_n) = 1 \quad \text{et} \quad T^{(j)}(u; p_0, \ldots, p_n) = 0 \quad \text{si } j > 0$$

donc $T_n(u) \leqslant 1$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et par suite $t(u) \leqslant 1$.

2° *La fonction $t(u) = t(x, y)$ est homogène du degré 1, c'est-à-dire*

$$(22) \qquad t(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot t(x, y),$$

où λ est un nombre complexe quelconque.

En effet, il suit de la formule (11′) que

$$T^{(j)}(\lambda u; p_0, \ldots, p_n) = \lambda^n \cdot T^{(j)}(u; p_0, \ldots, p_n) \qquad \text{pour } j = 0, 1, \ldots, n$$

donc

$$T_n(\lambda u) = |\lambda|^n \cdot T_n(u)$$

et par suite $t(\lambda u) = |\lambda| \cdot t(u)$.

3⁰ *Quels que soient* x *et* y *on a*

$$\frac{1}{2M}(|x|+|y|) \leqslant t(x,y) \leqslant \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{\theta(E)}(|x|+|y|), \tag{23}$$

où M *est le maximum des modules des coordonnées de tous les points de* E.

Démonstration. La prémière des inégalités (23) résulte de (21). Soit $\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ un système de $n+1$ points de E pour lequel

$$\min_{(j)} \theta^{(j)}(q_0, \ldots, q_n) = \theta_n(E).$$

En désignant par x_k, y_k les coordonnées de q_k on a

$$|uq_k| = \frac{1}{2}|xy_k - yx_k| \leqslant \frac{M}{2}(|x|+|y|)$$

donc

$$T_n(u) \leqslant \max_{(j)} \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \left| \frac{uq_k}{q_j q_k} \right| \leqslant \left[\frac{1}{2} M(|x|+|y|)\right]^n \cdot \frac{1}{\min\limits_{(j)} \theta^{(j)}(q_0, \ldots, q_n)}$$

et par suite

$$T_n(u) \leqslant \left[\frac{M(|x|+|y|)}{2}\right]^n \cdot \frac{1}{\theta_n(E)}$$

ce qui entraîne la seconde des inégalités (23).

Il résulte de (23) que $t(u)$ tend vers zéro lorsque u tend vers l'origine des coordonnées et que $t(u)$ augmente indéfiniment lorsque u tend vers l'infini.

4⁰ *Lorsque* E *est contenu dans une hypersurface definie par l'équation*

$$|Q(x,y)| = c, \tag{24}$$

où $Q(x,y) = Q(u)$ *est un polynome homogène quelconque et* c *une constante positive, alors*

$$t(u) = 1 \qquad \textit{en chaque point de } E.$$

En effet, d'après 1° on a $t(u) \leqslant 1$ dans E. Soit k le degré du polynome $Q(x,y)$, $n = k\nu$ pour $\nu = 1, 2, \dots$ et $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ un système de points de E. On a identiquement

$$[Q(u)]^\nu = \sum_{j=0}^{n} [Q(p_j)]^\nu \cdot T^{(j)}(u;\, p_0, \dots, p_n)$$

d'où l'on déduit, en faisant varier les points p_k dans E,

$$|Q(u)|^\nu \leqslant (n+1) \cdot c^\nu \cdot T_n(u)$$

donc en chaque point de l'hypersurface (24) on a

$$T_n(u) \geqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad t(u) \geqslant 1.$$

Par suite $t(u) = 1$ dans E.

6. Polynomes fondamentaux. Soit

(25) $$r_0, r_1, \dots, r_n$$

un système de $n+1$ points de E remplissant la condition:

(26) $$V(r_0, \dots, r_n) \geqslant V(p_0, \dots, p_n)$$

pour chaque système $\{p_0, p_1, \dots, p_n\} \in E$.

Supposons que les indices des points (25) soient choisis de manière qu'on ait

(27) $$\theta^{(0)}(r_0, \dots, r_n) \leqslant \theta^{(1)}(r_0, \dots, r_n) \leqslant \dots \leqslant \theta^{(n)}(r_0, \dots, r_n)$$

et formons les polynomes

(28) $$T^{(j)}(u; r_0, \dots, r_n), \qquad j = 0, 1, \dots, n.$$

Je dis que

(29) $$|T^{(j)}(u; r_0, \dots, r_n|) \leqslant 1 \qquad \text{pour } u \in E,\ j = 0, 1, \dots, n.$$

En effet, dans le cas contraire il existerait un indice $j = \nu$ et un point $r'_\nu \in E$ pour lequel $|T^{(\nu)}(r'_\nu; r_0, \dots, r_n)| > 1$ et par suite

$$\prod_{\substack{k=0\\(k \neq \nu)}}^{n} |r'_\nu r_k| > \prod_{\substack{k=0\\(k \neq \nu)}}^{n} |r_\nu r_k|.$$

En multipliant cette inégalité par le produit $V(r_0,\dots,r_{\nu-1},r_{\nu+2},\dots,r_n)$ on en déduirait l'inégalité

$$V(r_0,\dots,r_{\nu-1},r'_\nu,r_{\nu+1},\dots,r_n) > V(r_0,\dots,r_n)$$

incompatible avec l'hypothèse (26).

Les points (25) remplissant la condition (26) seront dits *points extrémaux* de l'ordre n de l'ensemble E. Leurs position dans E dépend naturellement de n [6]). Parmi les polynomes (28) celui d'indice $j=0$ sera dit n-ième *polynome fondamental* appartenant à E et désigné plus brièvement par $\Pi_n(u)$ ou par $\Pi_n(x, y)$

$$\Pi_n(u) = T^{(0)}(u; r_0,\dots,r_n) \qquad n=1,2,\dots \tag{30}$$

Désignons encore par $\delta(u,E)=\delta(u)$ la borne inférieure et par $\Delta(u,E)=\Delta(u)$ la borne supérieure des distances triangulaires $|up|$ lorsque p parcourt E.

Les polynomes fondamentaux jouissent de la propriété suivante:

Il existe la limite $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\Pi_n(u)|}$ *en chaque point* u *de l'espace* S *dont la distance* $\delta(u,E)$ *est positive et on a*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Pi_n(u)} = t(u). \tag{31}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit u un point fixe quelconque de S et $m=m(u)$ celui des indices $j=0,1,\dots,n$ pour lequel

$$|T^{(m)}(u; r_0,\dots,r_n)| = \max_{(j)} |T^{(j)}(u; r_0,\dots,r_n)|.$$

Je dis que:

$$T_n(u)\cdot\frac{|ur_m|}{\Delta(u)} \leqslant |\Pi_n(u)| \leqslant (n+1)\,T_n(u). \tag{32}$$

La prémière de ces deux inégalités résulte immédiatement de l'identité

$$\left| T^{(m)}(u; r_0,\dots,r_n)\cdot\frac{ur_m}{ur_0}\cdot\frac{\theta^{(m)}(r_0,\dots,r_n)}{\theta^{(0)}(r_0,\dots,r_n)}\right| = |T^{(0)}(u; r_0,\dots,r_n)|,$$

---

[6]) Il est clair qu'à chaque n correspond au moins un système de points extrémaux de l'ordre n.

car $\theta^{(0)} \leqslant \theta^{(m)}$ et $T_n(u) \leqslant |T^{(m)}(u; r_0, \dots, r_n)|$. Pour prouver la seconde observons que, si $\varepsilon > 0$, il existe dans E un système de $n+1$ points $q_0, q_1, \dots, q_n$ pour lequel

$$\max_{(j)} |T^{(j)}(u; q_0, \dots, q_n)| < T_n(u) + \varepsilon. \tag{33}$$

D'après la formule d'interpolation de Lagrange on a

$$\Pi_n(u) = \sum_{j=0}^{n} \Pi_n(q_j) \cdot T^{(j)}(u; q_0, \dots, q_n)$$

ponc, étant $|\Pi_n(q_j) \leqslant 1$ pour $j = 0, 1, \dots, n$, on a

$$|\Pi_n(u)| \leqslant (n+1) \cdot \max_{(j)} |T^{(j)}(u; q_0, \dots, q_n)| < (n+1)[T_n(u) + \varepsilon],$$

ce qui entraîne l'inégalité en question car ε est arbitrairement petit. La proposition (31) résulte immédiatement de (19) et (32).

Observons que la condition $\delta(u, E) > 0$ n'est pas nécessaire pour la validité de la formule (31). Il est évident que, si $\delta(u, E) = 0$ mais il existe un nombre $\mu > 0$ tel qu'on ait $|ur_m| \geqslant \frac{\mu}{n^2}$ pour une infinité des valeurs de n, la formule (31) découle de (32). Plus généralement, la formule (31) reste vraie si

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|ur_m|} = 1$$ [7]).

Observons encore que les modules de tous les polynomes (28), comme celui de $\Pi_n(u)$, ne surpassent pas $(n+1) T_n(u)$ et par suite

$$T_n(u) \leqslant \sum_{j=0}^{n} |T^{(j)}(u; r_0, \dots, r_n)| \leqslant (n+1)^2 \cdot T_n(u). \tag{34}$$

Il en résulte que

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\sum_{j=0}^{n} |T^{(j)}(u; r_0, \dots, r_n)|} = t(u) \qquad \text{pour chaque } u \in S. \tag{35}$$

---

[7]) On sait que la position du point r_m dépend de n et de u.

7. Problème de continuité. Le problème de continuité de la fonction $t(u;E)=t(u)$ ne semble pas être simple. Voici quelques résultats partiels concernant ce problème.

Partageons l'espace S en trois ensembles disjoints

$$S=\{o\}+S_0+S_1$$

dont l'ensemble $\{o\}$ contient le seul point o, S_0 contient les points $u\neq o$ dont la distance triangulaire $\delta(u,E)$ à l'ensemble E est égale à zéro et $S_1=S-\{o\}-S_0$. Je dis que:

1° *$t(u)$ est continu au point o.*

En effet, il suit des l'inégalités (23) que $\lim_{u\to o} t(u)=0$ et on a vu plus haut que $t(o)=0$.

2° *$t(u)$ est continu dans l'ensemble S_1.*

En effet, observons que S_1 est un ensemble ouvert dans l'espace S à 4 dimensions [8]) et que les polynomes fondamentaux $\Pi_n(u)=\Pi_n(x,y)$, $n=1,2,\ldots$ ne s'annulent pas dans S_1. Par suite les fonctions de deux variables complexes x et y

$$\sqrt[n]{\Pi_n(x,y)}, \qquad n=1,2,\ldots \tag{36}$$

sont analytiques dans le voisinage de chaque point de S_1.

Dans chaque domaine borné $D\subset S_1$ la suite (36) est uniformément bornée car, d'après (20) et (32), on a

$$\left|\sqrt[n]{\Pi_n(u)}\right|\leq\sqrt[n]{n+1}\cdot\frac{\Delta(u)}{\theta(E)}$$

où $\Delta(u)$ en dépasse pas dans D un nombre positif. Il s'ensuit que la convergence (31) est uniforme dans le voisinage de chaque point de S_1 et par suite la fontion limite $t(u)$ est continue dans S_1.

3° Passons à l'ensemble S_0 et supposons que le point o reste en dehors de E. Alors chaque point $u\in S_0$ peut être représenté par le produit

$$u=\lambda\cdot u_0$$

où λ est un nombre complexe et u_0 est un point de E.

---

[8]) Car S_1 est l'ensemble de points de S en lesquels $\delta(u,E)>0$ et la fonction $\delta(u,E)$ est continue dans S. Observons que si E contient l'origine des coordonnées, l'ensemble S_1 est vide.

Observons que, si la fonction $t(u)$ est continue en un point u_0, elle reste continue en chaque point $\lambda\cdot u_0$ car, si $\lim\limits_{u\to u_0} t(u)=t(u_0)$, on a

$$\lim_{u\to\lambda u_0} t(u)=\lim_{u\to u_0} t(\lambda u)=\lambda\cdot\lim_{u\to u_0} t(u)=\lambda\cdot t(u_0)=t(\lambda u_0).$$

Il s'ensuit que:

$t(u)$ est continu dans S_0 s'il est continu dans E; il suffit même que $t(u)$ soit continu sur la frontière E^0 de E.

Je vais maintenant prouver que:

La fonction $t(u)$ est semi-continue inférieurement en chaque point u_0 de l'espace S, c'est-à-dire à chaque $\varepsilon>0$ correspond un voisinage $V=V(u_0,\varepsilon)$ de u_0 tel que

$$t(u)>t(u_0)-\varepsilon \qquad \text{pour } u\in V.$$

Démonstration. Soit $\{r_0,r_1,\dots,r_n\}$ un système de points extrémaux de l'ordre n de E. La somme

$$\Phi_n(u)=\sum_{j=0}^{n}|T^{(j)}(u;r_0,\dots,r_n)|$$

est une fonction continue du point u et on a d'après (34)

$$\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\Phi_n(u)\leqslant T_n(u)\leqslant\Phi_n(u).$$

D'autre part, d'après (14)

$$T_{kn}(u)\geqslant[T_n(u)]^k \qquad \text{pour } k=1,2,\dots;\ n=1,2,\dots,$$

donc

$$\sqrt[kn]{T_{kn}(u)}\geqslant\sqrt[n]{T_n(u)}$$

d'où l'on déduit, en faisant tendre k vers l'infini,

$$t(u)\geqslant\sqrt[n]{T_n(u)} \qquad \text{pour } n=1,2,\dots$$

et par suite

$$t(u)\geqslant c_n\sqrt[n]{\Phi_n(u)}, \qquad \text{où } c_n=\frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)^2}}, \qquad n=1,2,\dots$$

Soit u_0 un point quelconque de S. Puisque

$$t(u) \geqslant c_n \sqrt[n]{\Phi_n(u_0)} + c_n \sqrt[n]{\Phi_n(u)} - c_n \sqrt[n]{\Phi_n(u_0)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

et que d'après (35) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \sqrt[n]{\Phi_n(u_0)} = t(u_0)$ car $c_n \to 1$, il existe un nombre $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$c_N \sqrt[N]{\Phi_N(u_0)} > t(u_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

donc, quel que soit u, on a

$$t(u) > t(u_0) - \frac{\varepsilon}{2} + c_N \left[\sqrt[N]{\Phi_N(u)} - \sqrt[N]{\Phi_N(u_0)}\right].$$

D'autre part, la fonction $\sqrt[N]{\Phi_N(u)}$ étant continue au point $u = u_0$ il existe un voisinage $V = V(u_0, \varepsilon)$ de u_0 tel que

$$c_N \left[\sqrt[N]{\Phi_n(u)} - \sqrt[N]{\Phi_N(u_0)}\right] > -\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour } u \in V$$

donc $t(u) > t(u_0) - \varepsilon$ pour $u \in V$, c. q. f. d.

8. Problème de continuité (suite). Considérons dans l'espace S un arc quelconque C défini par l'équation

$$(37) \qquad u = u(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

désignons le point $u(t)$ de C plus brièvement par u_t et supposons que la distance triangulaire $|u_0 u_1|$ soit positive. La distance $|u_0 u_t|$ varie continûment avec t donc à chaque nombre positif $\mu \leqslant 1$ correspond au moins un point $u = u_t$ de C satisfaisant à l'équation

$$|u_0 u| = \mu \cdot l \qquad \text{où } l = |u_0 u_1|.$$

Le point de C (ou un de ces points s'il y en a plusieurs) satisfaisant à cette équation et le plus éloigné de l'origine des coordonnées sera désigné par

$$v_\mu.$$

On constate aisément que si l'arc C se réduit au segment rectiligne

$$u = u_0 + (u_1 - u_0)t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

alors $v_\mu = u_\mu$ et $|v_\mu v_{\mu'}| = (\mu' - \mu) \cdot l$ pour $0 \leqslant \mu < \mu' \leqslant 1$. Mais, lorsque l'arc (37) est quelconque la dernière égalité n'est pas en général vraie et les trois cas

$$|v_\mu v_{\mu'}| \gtreqless (\mu' - \mu) \cdot l$$

sont possibles.

Je dirai que *l'arc* (37) *remplit en son point* u_0 *la „condition A"*, si à chaque $\eta > 0$ on peut faire correspondre une partie C_α de C définie par l'équation

$$u = u(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \alpha, \text{ où } 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{38}$$

telle que $|u_0 u_\alpha| = d > 0$ et que, si l'on désigne par v_μ le point de l'arc (38) le plus éloigné de l'origine des coordonnées remplissant la condition $|u_0 v_\mu| = \mu \cdot d$, on a quels que soient μ et μ

$$|v_\mu v_{\mu'}| \geqslant (\mu' - \mu) \cdot d \cdot (1 - \eta), \quad \text{où } 0 \leqslant \mu < \mu' \leqslant 1. \tag{39}$$

Ceci posé, soit u_0 un point de E^0 donc $t(u_0) \leqslant 1$. Je dis que:

Si $t(u_0) = 1$ *et si* E^0 *contient un arc* (37) *passant par* u_0 *et remplissant en ce point la condition* A, *alors la fonction* $t(u)$ *est semi-continue supérieurement au point* u_0, *c'est-à-dire, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$t(u) < t(u_0) + \varepsilon \tag{40}$$

dans un voisinage de u_0.

Démonstration. Soit (38) la partie de l'arc (37) dans laquelle la condition (39) est remplie. Désignons par

q_k le point v_μ correspondant à $\mu = \frac{k^2}{n^2}$, où $k = 0, 1, \ldots, n$,

par x_k, y_k les coordonnées de q_k et par $\theta^{(j)}(u)$ le produit

$$\theta^{(j)}(u) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} |u q_k|.$$

Désignons encore par V_ϱ le voisinage

$$V_\varrho = \{|x - x_0| < \varrho, \quad |y - y_0| < \varrho\}, \qquad \varrho > 0,$$

du point $u_0 = q_0$ et soit δ un nombre positif quelconque.

Étant

$$uq_k = \tfrac{1}{2}(xy_k - yx_k) = \tfrac{1}{2}(x_0 y_k - y_0 x_k) + \tfrac{1}{2}[(x - x_0)y_k - (y - y_0)x_k]$$

on a $|uq_k| \leqslant |q_0 q_k| + \frac{1}{2}|(x - x_0)y_k - (y - y_0)x_k|$ donc lorsque $u \in V_\varrho$

$$|uq_k| \leqslant \frac{k^2}{n^2} d + \delta,$$

où δ dépend de ϱ et tend vers zéro avec ϱ. Posons $\alpha^2 = \delta/d$. On aura

$$(41) \quad \theta^{(j)}(u) \leqslant \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} d + \delta\right) \leqslant d^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} + \alpha^2\right), \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

pour $u \in V_\varrho$, où $\alpha = \sqrt{\delta/d}$ tend vers zéro avec ϱ.

D'autre part, d'après (39) on a

$$|q_j q_k| \geqslant \frac{|k^2 - j^2|}{n^2} d(1 - \eta) \qquad \text{pour } j \text{ et } k = 0, 1, \ldots, n,$$

donc

$$\theta^{(j)}(q_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} |q_j q_k| \geqslant d^n (1 - \eta)^n \cdot I_j,$$

où l'on a posé

$$I_j = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \frac{|k^2 - j^2|}{n^2}.$$

Lorsque $j \geqslant 1$ on a

$$I_j = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \prod_{k=1}^{j} \frac{n + k}{n + k - j} > \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$$

donc

$$(42) \qquad \theta^{(j)}(q_j) \geqslant \tfrac{1}{2} d^n (1 - \eta)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \qquad \text{pour } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Observons maintenant que $|T^{(j)}(u;q_0,\dots,q_n)|=\theta^{(j)}(u):\theta^{(j)}(q_j)$ donc

$$|T^{(j)}(u;q_0,\dots,q_n)|\leqslant\cdot\frac{2}{(1-\eta)^n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^2}+\alpha^2}{\frac{k^2}{n^2}},\qquad j=0,1,\dots,n,$$

et par suite

$$\sqrt[n]{T_n(u)}\leqslant\frac{\sqrt[n]{2}}{1-\eta}\,e^{\sigma_n(\alpha)}\tag{43}$$

où l'on a posé

$$\sigma_n(\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{\frac{k^2}{n^2}+\alpha^2}{\frac{k^2}{n^2}}.$$

Lorsque $n\to\infty$ la dernière somme tend vers la limite

$$\sigma(\alpha)=\int_0^1\log\frac{t^2+\alpha^2}{t^2}\,dt$$

et, comme

$$\log\frac{t^2+\alpha^2}{t^2}<2\log\frac{t+\alpha}{t}\qquad\text{pour } 0<t<1,$$

on a

$$\sigma(\alpha)<2\int_0^1\log\frac{t+\alpha}{t}\,dt=2\log\frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha}$$

donc le second membre de l'inégalité (43) tend vers une limite ne depassant pas

$$\frac{1}{1-\eta}\left[\frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha}\right]^2.$$

Par conséquent, à chaque $\varepsilon>0$ correspond un nombre $N(\varepsilon)$ tel que, quel que soit $u\in V_\varrho$, on a

$$\sqrt[n]{T_n(u)}<\frac{1}{1-\eta}\left[\frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha}\right]^2+\frac{\varepsilon}{2}\qquad\text{pour } n>N(\varepsilon).$$

Le premier terme du second membre de cette inégalité tend vers 1 lorsque $\eta \to 0$ et $a = \sqrt{\delta/d} \to 0$. Les quantités $\eta > 0$ et $a > 0$ sont arbitrairement petits car η est quelconque et $\delta > 0$ est arbitrairement petit pourvu que $\varrho > 0$ soit suffisamment petit, donc lorsque $\varrho = \varrho(\varepsilon)$ est suffisamment petit on a

$$\sqrt[n]{T_n(u)} < 1 + \varepsilon \qquad \text{pour } u \in V_\varrho,\ n > N(\varepsilon)$$

et par suite $t(u) < 1 + \varepsilon = t(u_0) + \varepsilon$ pour $u \in V_\varrho$; c. q. f. d.

Il résulte immédiatement des deux théorèmes précédents (p. 260 et 262) que:

$t(u)$ est continu en chaque point u_0 de E^0 en lequel $t(u) = 1$ lorsque par u_0 passe un arc appartenant à E et remplissant en u_0 la condition A.

On a vu plus haut (§ 5) que $t(u) = 1$ dans E lorsque E est contenu dans une hypersurface $|Q(u)| = c > 0$, où $Q(u)$ est un polynome homogène par rapport aux coordonnées de u. Il en suit d'après ce qui précède que:

$t(u)$ est continu dans l'espace S tout entier lorsque E est une somme des arcs remplissant la condition A et contenus dans une hypersurface $|Q(u)| = c > 0$.

Dans le cas, où E est un arc ne remplissant pas en chacun de ses points la condition A, la fonction $t(u; E)$ peut avoir des points de d i s c o n t i n u i t é. Voici l'exemple d'une telle fonction:

Désignons par Γ le segment rectiligne

$$u = u_0 + (u_1 - u_0)t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

joignant deux points u_0 et u_1 de distance triangulaire positive et par Γ_1 le segment rectiligne joignant le point u_0 au point $2 \cdot u_0$ et soit E la somme

$$E = \Gamma + \Gamma_1. \tag{44}$$

Or, la fonction $t(u; E)$ est discontinue au point $2 \cdot u_0$.

En effet, d'après le théorème précédent la fonction $t(u; \Gamma)$ est continue quel que soit u. D'autre part, on peut prouver que

$$t(u; E) = t(u; \Gamma)$$

partout à l'exception des points $u=\lambda\cdot u_0$, où $0<|\lambda|<\infty$, et que $t(2u_0;E)=1$ tandis que $t(2u_0;\Gamma)=2$ donc la fonction $t(u;E)$ est discontinue au point $u=2u_0$.

Observons que la somme (44) est un arc ne remplissant pas au point $2u_0$ la condition A.

9. Application des fonctions $t(u;E)$. Les fonctions

$$t(u;E)=t(u)$$

jouissent d'une propriété extrémale par rapport à l'ensemble de polynomes homogènes

$$P_n(x,y)=a_{n,0}\,x^n+a_{n-1,1}\,x^{n-1}\,y+\ldots+a_{0,n}\,y^n,\qquad n=0,1,\ldots$$

où les a_{ik} sont des nombres complexes quelconques. Voici cette propriété:

Si une suite $\{P_n(x,y)\}$ est uniformément bornée dans un ensemble E d'écart positif on a en chaque point de l'espace S

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|P_n(x,y)|}\leqslant t(x,y)=t(x,y;E). \tag{45}$$

Démonstration. Désignons $P_n(x,y)$ plus bièvement par $P_n(u)$ et soit K un nombre positif tel qu'on ait

$$|P_n(u)|\leqslant K\qquad \text{pour } u\in E,\ n=0,1,\ldots.$$

Soit u un point fixe quelconque de S. À chaque $\varepsilon>0$ correspond un système de $n+1$ points $q_0,q_1,\ldots,q_n$ de E pour lesquels

$$\max_{(j)}|T^{(j)}(u;q,\ldots,q_n)|\leqslant T_n(u)+\varepsilon.$$

D'après la formule d'interpolation de Lagrange on a

$$P_n(u)=\sum_{j=0}^{n}P_n(q_j)\cdot T^{(j)}(u;q_0,\ldots,q_n)$$

donc

$$|P_n(u)|\leqslant K\cdot\sum_{j=0}^{n}|T^{(j)}(u;q_0,\ldots,q_n)|\leqslant(n+1)K\cdot[T_n(u)+\varepsilon]$$

et comme ε est arbitrairement petit

$$|P_n(u)| \leqslant (n+1) K \cdot T_n(u)$$

d'où l'on déduit l'inégalité (45).

Observons que la série de Taylor d'une fonction $f(x,y)$

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [f_x(0,0)\cdot x + f_y(0,0)\cdot y]^{(n)} \tag{46}$$

est une série de la forme $\sum\limits_{0}^{\infty} P_n(x,y)$, où les $P_n(x,y)$ sont des polynomes homogènes:

$$P_n(x,y) = \sum_{\mu+\nu=n} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \qquad a_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu!\,\nu!}\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right)_{x=y=0}$$

La connaissance des fonctions $t(u;E)$ permet de résoudre le problème suivant: Quel est le plus grand domaine $D(E)$ dans lequel chaque série (46) converge lorsqu'elle converge, où si elle est bornée, uniformément dans un ensemble E?

Il résulte presque immédiatement du théorème précédant que le domaine $D(E)$ contient l'intérieur de l'ensemble de points définis par l'inégalité

$$t(u;E) < 1.$$

Désignons cet intérieur par $\Delta(E)$, donc $D(E) \supset \Delta(E)$. D'autre part, $D(E)$ ne peut pas être plus grand que $\Delta(E)$ car la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Pi_n(u),$$

où les $\Pi_n(u)$ sont des polynomes fondamentaux appartenant à E, converge dans E et possède des points de divergence dans le voisinage de chaque point extérieur à $\Delta(E)$; donc $D(E) = \Delta(E)$.

Remarquons que le domaine $\Delta(E)$ est connexe et contient toujours l'origine des coordonnées.

10. Problèmes à résoudre. Les recherches faites dans les paragraphes 8 et 9 sur la continuité des fonctions $t(u;E)$ ne sont pas complètes.

Il reste encore à examiner la continuité de $t(u;E)$ en un point u_0 de E^0 en lequel $t(u;E)<1$ ou bien par lequel ne passe aucun arc remplissant la condition A et contenu dans E. Il reste aussi à examiner le cas où l'origine des coordonnées est le point d'accumulation de la frontière E^0 de E et, plus généralement, le rôle que joue dans la construction de la fonction $t(u;E)$ la partie de E contenue dans le voisinage suffisamment petit de l'origine des coordonnées.

Państwowy Instytut Matematyczny.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES RESTES CUBIQUES

Par W. Sierpiński (Warszawa)

Le but de cette Note est de déterminer tous les nombres naturels $m>1$, tels que tout entier est un reste cubique pour le module m (c'est-à-dire qu'il existe pour tout entier x un entier y, tel que $x\equiv y^3 \pmod{m}$).

Je démontrerai que *pour que le nombre naturel $m>1$ soit tel que tout entier est un reste cubique pour le module m, il faut et il suffit que m soit un produit de nombres premiers distincts dont aucun n'est pas de la forme $3k+1$* (le nobre de facteurs premiers de m se pouvant aussi réduire à un).

Je prouverai même un théorème plus général que voici:

Théorème. *Soit q un nombre premier et m un nombre naturel >1. Pour qu'il existe pour tout entier x un entier y, tel que $x\equiv y^q \pmod{m}$, il faut et il suffit que m soit un produit de nombres premiers distincts dont aucun n'est pas de la forme $qk+1$.*

Démonstration. Supposons que le nombre naturel $m>1$ n'est pas un produit de nombres premiers distincts. Il existe alors un nombre premier p et un nombre naturel l, tels que $m=p^2l$, et, pour $x=pl$ on a $0<x<m$ et $x^q=p^ql^q=mp^{q-2}l^{q-1}\equiv 0 \pmod{m}$.

Les restes mod m des nombres $0^q, 1^q, 2^q, \ldots, (m-1)^q$ ne sont pas donc tous distincts, ce qui devrait évidemment être s'il existerait pour tout entier x un entier y, tel que $x\equiv y^q \pmod{m}$. Le nombre m doit donc être un produit de facteurs premiers distincts.

S'il existerait entre les facteurs premiers du nombre m un de la forme $p=qk+1$, on aurait $k=(p-1):q<p-1$ et, en désignant par g une racine primitive du module p, on aurait $g^k\not\equiv 1 \pmod p$, d'où, pour $m=pm_1$ on trouve $g^k m_1 \not\equiv m_1 \pmod m$. D'autre part, d'après $g^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, on a $m=pm_1|(g^{p-1}-1)m_1^q$, ce qui donne, d'après $p-1=qk$: $(g^k m_1)^q\equiv m_1^q \pmod m$, ce qui est impossible, vu que les restes des nombres $0^q, 1^q, \ldots, (m-1)^q$ mod m sont tous distincts. La condition de notre théorème est donc nécessaire.

Supposons maintenant que le nombre naturel m remplisse cette condition. On a donc $m=p_1p_2\ldots p_s$, où p_i $(i=1,2,\ldots,s)$ sont des nombres premiers distincts dont aucun n'est pas de la forme $qk+1$. Posons $P=(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_s-1)$: on aura évidemment $(P,q)=1$ et il existe un nombre naturel t, tel que $Pt\equiv -1 \pmod q$, d'où $Pt+1=lq$. où l est un nombre naturel. Je dis que pour tout x entier:

$$(1)\qquad x\equiv x^{Pt+1} \pmod{p_i} \text{ pour } i=1,2,\ldots,s.$$

En effet, soit i un des nombres $1,2,\ldots,s$. Si $x\equiv 0 \pmod{p_i}$, la congruence (1) est évidemment vraie. Si $x\not\equiv 0 \pmod{p_i}$, on a, d'après le théorème de Fermat, $x^{p_i-1}\equiv 1 \pmod{p_i}$, et, comme $p_i-1|P$, $x^{Pt}\equiv 1 \pmod{p_i}$, d'où la congruence (1).

Vu que $m=p_1p_2\ldots p_s$, où les nombres premiers $p_1,p_2,\ldots,p_s$ sont distincts, la congruence (1) donne

$$x\equiv x^{Pt+1} \pmod m$$

ce qui donne, vu que $Pt+1=lq$:

$$(2)\qquad x\equiv (x^l)^q \pmod m.$$

On a ainsi pour tout x entier la congruence (2). Il est ici à remarquer que le nombre naturel l ne dépend pas du nombre x.

La condition de notre théorème est ainsi suffisante. Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Il est à remarquer que, si q est un nombre premier impair, on peut démontrer d'une façon tout à fait élémentaire qu'il existe une infinité de nombres premiers $m=p$ satisfaisant aux

conditions de notre théorème. En effet, soit n un nombre naturel. Les facteurs premiers du nombre $n!\,q-1$ sont tous $>n$ et ne peuvent pas être tous de la forme $qk+1$ (puisqu'alors leurs produit serait également de cette forme). Il existe donc un nombre premier $p>n$ qui n'est pas de la forme $qk+1$, et la condition de notre théorème est remplie pour $m=p$.

En ce qui concerne le cas $q=3$, il est à remarquer qu'il n'existe que trois nombres naturels $m>1$ (2,3 et 6) tels que tout entier x satisfait à la congruence $x\equiv x^3 \pmod m$ et qu'il n'existe que sept nombres naturels $m>1$ (2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30) tels qu'on a pour tout entier x la congruence $x\equiv x^9 \pmod m$. Or, il n'existe aucun nombre naturel $m>2$ tel qu'on ait $x\equiv x^6 \pmod m$ pour tout entier x.

Il est encore à remarquer qu'il n'existe aucun nombre naturel $m>2$ admettant seulement deux restes cubiques distincts modulo m (0 et 1), et qu'il n'existe que trois nombres naturels (4, 7 et 9) admettant précisément trois restes cubiques distincts modulo m.

En utilisant le théorème connu de Dirichlet-Lejeune sur la progression arithmétique, on peut déduire de notre théorème la proposition suivante:

Pour que le nombre naturel s jouisse de la propriété qu'il existe une infinité de nombres naturels m tels que tout entier est congruent modulo m à la s-ième puissance d'un entier, il faut et il suffit que s soit un nombre impair.

Démonstration. La condition est nécessaire, puisque, pour $s=2k$, on a $(m-1)^s\equiv 1^s \pmod m$ et $m-1\not\equiv 1 \pmod m$ pour $m>2$.

Supposons maintenant que s soit un nombre impair.

Notre proposition étant évidemment vraie pour $s=1$, nous pouvons supposer que $s>1$. Soit $s=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\dots q_r^{\alpha_r}$ le développement du nombre s en facteurs premiers (tous impairs). Comme $(s.2)=1$, il existe, d'après le théorème de Dirichlet-Lejeune une infinité de nombres premiers p de la forme $p=sk+2$. Soit p un de ces nombres. On a donc $p\equiv 2 \pmod{q_1}$ et p n'est pas de la forme q_1t+1. D'après notre théorème il existe donc pour tout entier x un entier x_1, tel que $x\equiv x_1^{q_1} \pmod p$, ensuite un entier x_2, tel que $x_1\equiv x_2^{q_1} \pmod p$, ..., enfin un entier

x_{α_1}, tel que $x_{\alpha_1-1} \equiv x_{\alpha_1}^{q_1}$ (mod p), d'où on trouve $x \equiv x_{\alpha}^{q_1^{\alpha_1}}$ (mod p). Il existe donc pour tout entier x un entier y_1 tel que $x \equiv y_1^{q_1^{\alpha_1}}$ (mod p). Pareillement on démontre qu'il existe un entier y_2 tel que $y_1 \equiv y_2^{q_2^{\alpha_2}}$ (mod p), ..., enfin un entier y_r tel que $y_{r-1} \equiv y_r^{q_r^{\alpha_r}}$ (mod p), et ces congruences donnent tout de suite: $x \equiv y_r^{q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_r^{\alpha_r}}$ (mod p). Il existe donc pour tout entier x un entier y tel que $x \equiv y^s$ (mod p).

La condition de notre proposition est ainsi suffisante.

Notre proposition se trouve ainsi démontrée.

COMPTES RENDUS
DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

1 JUILLET 1948 — 30 SEPTEMBRE 1949

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ

BUREAU CENTRAL

élu à l'Assemblée Générale de la Société Polonaise de Mathématique qui a eu lieu le 23 septembre 1948 à Varsovie.

Président de la Société: Prof. Dr Kazimierz Kuratowski.

Vice-Présidents de la Société: Présidents des Sections de Cracovie, Lublin, Łódź, Poznań et Wrocław.

Secrétaire de la Société: Prof. Dr Edward Otto.

Trésorier de la Société: Prof. Dr Karol Borsuk.

Commission de Contrôle: Dr Zygmunt Butlewski, Prof. Dr Stanisław Gołąb, Prof. Dr Bronisław Knaster.

SECTION DE CRACOVIE

Président de la Section: Prof. Dr Franciszek Leja.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Tadeusz Ważewski.

Secrétaire de la Section: Doc. Dr Jacek Szarski.

Trésorier de la Section: Dr Roman Leitner.

Membres du Bureau de la Section: Prof. Dr Stanislaw Gołąb, Prof. Dr Jan Leśniak, Doc. Dr Włodzimierz Wrona.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Tadeusz Banachiewicz, Doc. Dr Mirosław Krzyżański, Dr Świętosław Romanowski.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Stanisław Gołąb, Prof. Dr Franciszek Leja, Dr Jan Leśniak, Prof. Dr Tadeusz Ważewski.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Tadeusz Banachiewicz, Doc. Dr Włodzimierz Wrona.

SECTION DE GDAŃSK[1])

Président de la Section: Prof. Dr Stanisław Turski.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Witold Nowacki.

Secrétaire de la Section: Prof. Dr Bronisław Czerwiński.

Trésorier de la Section: Mgr Ing. Marian Piątek.

Membre du Bureau de la Section: Mgr Jan Wełniak.

Commission de Contrôle: Prof. Ing. Michał Broszko, Dr Wacław Pawelski, Prof. Ing. Józef Wysocki.

SECTION DE LUBLIN

Président de la Section: Prof. Dr Mieczysław Biernacki.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Adam Bielecki.

Secrétaire de la Section: Mgr Jan Krzyż.

Trésorier de la Section: Mgr Wiktor Oktaba.

Membre du Bureau de la Section: Prof. Dr Mikołaj Olekiewicz.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Włodzimierz Urbański, Mgr Mieczysław Subotowicz.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Mieczysław Biernacki, Prof. Dr Adam Bielecki.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Włodzimierz Urbański, Prof. Dr Mikołaj Olekiewicz.

SECTION DE ŁÓDŹ

Président de la Section: Prof. Dr Zygmunt Zahorski.

Vice-Président de la Section: Dr Zygmunt Charzyński.

Secrétaire de la Section: Mgr Józef Janikowski.

Trésorier de la Section: Mgr Lech Włodarski.

Commission de Contrôle: Mgr Włodzimierz Krysicki, Mgr Jan Słowikowski.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Jerzy Popruženko, Ignacy Roliński.

---

[1]) La Section de Gdańsk fut fondée en février 1949.

SECTION DE POZNAŃ

Président de la Section: Prof. Dr Władysław Orlicz.

Vice-Président de la Section: Prof. Antoni Schönhuber.

Secrétaire de la Section: Doc. Dr Andrzej Alexiewicz.

Trésorier de la Section: Dr Zygmunt Butlewski.

Membre de Bureau de la Section: Mgr Halina Ryffertówna.

Commission de Contrôle: Mgr Marian Jarosz, Prof. Dr Zdzisław Krygowski, Prof. Dr Władysław Smosarski.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Władysław Orlicz, Prof. Antoni Schönhuber.

SECTION DE VARSOVIE

Président de la Section: Prof. Dr Kazimierz Zarankiewicz.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Karol Borsuk.

Secrétaire de la Section: Prof. Dr Aleksander Grużewski.

Trésorier de la Section: Alina Böhmówna.

Membre du Bureau de la Section: Prof. Dr Kazimierz Kuratowski, Prof. Dr Wacław Sierpiński.

Commission de Contrôle: Dr Henryk Greniewski, Prof. Dr Stefan Straszewicz.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Karol Borsuk, Prof. Dr Aleksander Grużewski, Prof. Dr Kazimierz Kuratowski, Prof. Dr Wacław Sierpiński, Prof. Dr Stefan Straszewicz.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Andrzej Mostowski, Prof. Dr Witold Pogorzelski, Prof. Dr Kazimierz Zarankiewicz.

SECTION DE WROCŁAW

Président de la Section: Prof. Dr Władysław Ślebodziński.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Edward Marczewski.

Secrétaire de la Section: Dr Maria Nosarzewska.

Trésorier de la Section: Mgr Mieczysław Warmus.

Membre du Bureau de la Section: Prof. Dr Bronisław Knaster.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Hugo Steinhaus, Prof. Dr Jerzy Słupecki, Dr Witold Wolibner.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Bronisław Knaster, Prof. Dr Edward Marczewski.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Jerzy Słupecki.

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

Signes: (C) = Cracovie, (Gd) = Gdańsk, (Lu) = Lublin, (Ł) = Łódź, (P) = Poznań, (Wr) = Wrocław, (V) = Varsovie, (*) avant resp. à la place de l'adresse signifie que l'actualité de l'adresse est problématique, resp. que l'adresse est inconnue.

(P) Ajdukiewicz, Kazimierz, Prof. Dr, *Poznań*, Śniadeckich 20.
(V) Alexandrow, Paul, Prof. Dr, *Moskwa* (U. R. S. S.), Staropimenowski per. 8 kw. 5.
(P) Alexiewicz, Andrzej, Doc. Dr, *Poznań*, Karwowskiego 12.
(V) Archibald, R. C., Prof. Dr, *Providence* (R. I., U. S. A.), Brown University.
(V) Aronszajn, Natan, Prof. Dr, *Oklahoma* (Okla. U. S. A.), University, Dept. of Math.
(C) Banachiewicz, Tadeusz, Prof. Dr, *Kraków*, Obserwat. Astron., Kopernika 27.
(C) Baran, Jan, (*) *Toruń*, Male Garbary, Gimn. Męskie.
(C) Barański, Feliks, Mgr, *Kraków*, Wita Stwosza 22, m. 11.
(C) Barnett, I. A., Prof. Dr, *Cincinnati* (Ohio, U. S. A.), University.
(V) Bary, Nina, Prof. Dr, (*) *Moskwa* (U. R.S.S.), Pokrowka 29 kw. 22.
(V) Bergman, Stefan, Prof. Dr, *Cambridge* (Mass, U. S. A.), Harvard University, 221 Pierce Hall.
(V) Białobrzeski, Czesław, Prof. Dr, *Warszawa*, Akademicka 3, m. 82.
(Lu) Bielecki, Adam, Prof. Dr, *Lublin*, Skłodowskiej 2.
(Lu) Biernacki, Mieczysław, Prof. Dr, *Lublin*, Narutowicza 30, m. 3.
(C) Birkenmajer, Aleksander, Prof. Dr, *Kraków*, Biblioteka Jagiellońska.
(Wr) Birnbaum, Zygmunt, Dr, *Seattle* 5 (Wash. U. S. A.).
(V) Bittner, Ryszard, *Warszawa-Okęcie*, Rysia 11.
(Gd) Blum, Jan, Mgr, *Gdańsk*, Zielona 1/2.
(V) Bochenek, Krystyn, Ing. Mgr, *Warszawa*, Kawcza 27.
(Wr) Bonder, Julian, Prof. Dr, *Gliwice*, Arkońska 3.
(V) Borsuk, Karol, Prof. Dr, *Warszawa*, Filtrowa 63, m. 18.
(C) Bouligand, Georges, Prof. Dr, *Paris*, 46 rue St André des Arts.

(V) Böhmówna, Alina, *Warszawa*, Al. Ujazdowskie 4, Seminarium Matematyczne U. W.

(Gd) Broszko, Michał, Prof. Ing., *Gdańsk-Wrzeszcz*, Narutowicza, Politechnika.

(C) Burzyński, Jan, Mgr, *Kraków*, Krowoderska 25.

(P) Butlewski, Zygmunt, Dr, *Poznań*, Słowackiego 35.

(C) Caccioppoli, Renato, Prof. Dr, *Naples* (Italie), Université.

(C) Cartan, Elie, Prof. Dr, *Paris*, 95 Boulevard Jourdan.

(C) Čech, Edward, Prof. Dr, Praha II (Č. S. R.), U Karlowa 3, Matematický Ustav University.

(V) Charzyński, Zygmunt, Dr, *Łódź*, Sanocka 34, m. 96.

(C) Choquet, Gustave, Prof. Dr, *Grenoble* (Isère, France), Institut Fourier.

(V) Chromiński, Antoni, Prof. *Kraków*, Św. Tomasza 30.

(C) Cieślewski, Romuald, *Chorzów*, Pl. Matejki 3/2.

(C) Cotton, Emile, Prof. Dr, *Grenoble* (Isère, France), 1 Place St. Laurent.

(V) Czechowski, Tadeusz, Mgr, *Warszawa*, Al. Niepodległości 138, m. 7.

(P) Czekanowski, Jan, Prof. Dr, *Poznań*, Święcickiego 4.

(Gd) Czerwiński, Bronisław, Prof. Dr, *Oliwa*, Podhalańska 15a.

(Lu) Czyż, Wiesław, *Lublin*, Weteranów 34.

(V) Czyżykowski, Mieczysław, Mgr, *Warszawa*, Nowowiejska 22, m. 38.

(P) Daniłowiczowa, Melania, *Warszawa*, Frascati 1/13.

(C) Delsarte, Jean, Maître de Conf. à la Fac. des Sci., (*) *Nancy*, 35 rue St. Michel (Meurthe et Moselle, France).

(P) Dobrzycki, Stanisław, Mgr, *Kielce*, Źródlana 17.

(C) Dollon, Jean, Prof. Dr, (*) *Nancy*.

(V) Dresden, Arnold, Prof. Dr, *Swarthmore*, Pa (U. S. A.), 606 Elm Ave.

(Wr) Drobot, Stefan, Dr, *Wrocław*, Kosynierska 2a/4.

(C) Durand, Georges, Prof. Dr, *Toulouse* (Haute Garonne, France), 87 rue du Dix-Avril.

(C) Dziula, Anna, *Katowice*, Rybnicka 12/6.

(C) Echagaray, André, Prof. Dr, (*) *Lima* (Peru), Universitad.

(V) Eilenberg, Samuel, Prof. Dr, *New York* 27 (U. S. A., N. Y.), Columbia University, Department of Mathematics.

(V) Errera, Samuel, Prof. Dr, (*) *Uccle* (Belgique).

(Wr) Feller, William, Prof. Dr, *Ithaca*, Cornell University (U. S. A., N. Y.).
(C) Fijoł, Kazimierz, *Kraków*, Gimn. IV, Krupnicza 2.
(C) Flamant, Paul, Prof. Dr, (*) *Strasbourg* (Bas-Rhin, France), 35 rue Schweighauser.
(C) Frydrych, Zdzisław, Mgr, *Kraków*, Krowoderska 6.
(C) Frylik, Alfred, *Katowice*, Rybnicka 12/6.
(Ł) Gans, Rozalia, Mgr, *Łódź*, Plocka 21, m. 3.
(V) Garcia, Godofredo, Prof. Ing., *Lima* (Pérou), Bolivar 280.
(P) Gibasiewicz, Witold, Mgr, *Poznań*, Liceum Mechaniczne.
(C) Gierulanka, Danuta, Dr, *Kraków*, Szlak 14.
(V) Gindifer, Mieczysław, Mgr, *Komorów* pod Warszawą, Akacjowa 4.
(C) Godeaux, Lucien, Prof. Dr, *Liège* (Belgique), 37 Quai Orban.
(C) Gołąb, Stanisław, Prof. Dr, *Kraków*, Łobzowska 61.
(P) Gospodarek, Stefan, Mgr, *Poznań*, Rynek Jeżycki 1.
(C) Górski, Jerzy, Mgr, *Kraków*, Konarskiego 18, m. 7.
(V) Greniewski, Henryk, Dr, *Warszawa*, Ordynacka 14, m. 14.
(V) Grużewska, Halina, Dr, *Warszawa*, Rakowiecka 6, m. 35.
(V) Grużewski, Aleksander, Prof. Dr, *Warszawa*, Rakowiecka 6, m. 35.
(V) Grzegorczyk, Andrzej, Mgr, *Warszawa*, Dantyszka 6.
(Wr) Hartman, Stanisław, Dr, *Wrocław*, Wyczółkowskiego 17.
(C) Härlen, Hasso, Dr, *Copenhague*, Fysisk Institut, Blegdamsvej 17.
(Wr) Helson, Henry, *Cambridge* 40 (Mass. U. S. A.), 21 Bates Str.
(V) Hiż, Henryk, Dr, *Warszawa*, Rakowiecka 41, m. 14.
(C) Hlavaty, Vaclav, Prof. Dr, *Prague* II, U Karlova 3 (Č. S. R.).
(C) Hławiczka, Stanisław, Ing., *Biała Krakowska*, Graniczna 13.
(Gd) Huber, Maksymilian, Prof. Dr, *Kraków*, Boczna Kremerowska 4.
(V) Hurewicz, Witold, Prof. Dr, *Cambridge* 39 (U. S. A. Mass.), Massachusetts Inst. of Tech.
(Wr) Ingarden, Roman, Dr, *Wrocław*, Kochanowskiego 57.
(Wr) Iwaszkiewicz, Bolesław, Mgr, *Wrocław*, 8-go Maja 84.
(Lu) Jakóbczyk, Franciszek, Ks., Mgr, *Lublin*, Ogrodowa 12.
(C) Janet, Maurice, Prof. Dr, *Paris* XVI, 4 rue de la Cure.
(Ł) Janikowski, Józef, Mgr, *Łódź*, Al. Kościuszki 85, m. 8.

(P) Jankowski, Wiktor, Mgr, *Poznań*, Kossaka 13/3.
(Ł) Janowski, Witold, Mgr, *Łódź*, Narutowicza 41, m. 5.
(Wr) Jarnik, Vojtech, Prof. Dr, *Praha*, Pevnostni 1.
(P) Jarosz, Marian, Mgr, *Poznań*, Garbary 22.
(V) Jaśkowski, Stanisław, Prof. Dr, *Toruń*, Bydgoska 78.
(P) Jeśmanowicz, Leon, Dr, *Toruń*, Bydgoska 14.
(C) Kampé de Fériet, Joseph, Prof. Dr, (*) *Lille* (Nord, France), 16 rue des Jardins.
(Wr) Kac, Marek, Prof. Dr, *Ithaca* (N. Y., U. S. A.) Cornell University.
(P) Karaśkiewicz, Edmund, Mgr, *Bydgoszcz*, Marcelińska 32a.
(C) Kawaler, Józef, *Wadowice*, Gimnazjum.
(V) Kirkor, Andrzej, *Warszawa*, Grójecka 40a.
(V) Kline, J. R., Prof. Dr, Dep. of Math., University of Pennsylvania, *Philadelphia* (U. S. A., Pa.).
(Wr) Knaster, Bronisław, Prof. Dr, *Wrocław* 12, Orłowskiego 15, m. 1.
(C) Kochmański, Tadeusz, Dr, *Kraków*, Zyblikiewicza 5.
(C) Kosicki, Jan, *Katowice*, Królowej Jadwigi 8/5.
(V) Kozakiewicz, Wacław, Prof. Dr, *Saskatoon* (Sask., Canada), University of Saskatchewan.
(C) Koziel, Karol, Doc. Dr, *Cieszyn*, Wyższa Szkoła Gospodarcza.
(Wr) Krieger, Cecylia, Prof., *Toronto* 5 (Canada), University of Toronto, Dep. of Mathematics.
(C) Krygowska, Zofia, Mgr, *Kraków*, Oleandry 6.
(P) Krygowski, Zdzisław, Prof. Dr, *Poznań*, Libelta 14.
(Ł) Krysicki, Włodzimierz, Mgr, *Łódź*, Zawadzka 25.
(Lu) Krzyż, Jan, *Lublin*, Bernardyńska 28.
(C) Krzyżański, Mirosław, Dr, *Kraków* (Bronowice), W. Halczyna 21.
(C) Kujawa, Leon, *Chorzów*, 3 Maja 3/5.
(V) Kulczycki, Stefan, *Warszawa*, 3-go Maja 5.
(Wr) Kulczyński, Stanisław, Prof. Dr, *Wrocław*, Kasprowicza 17.
(V) Kuratowski, Kazimierz, Prof. Dr, *Warszawa*, Kielecka 42.
(C) Labrousse, Léon, Prof. Dr, (*) *Paris* VII (France), 7 rue Léon, Vaudyer.
(C) Laine, Edouard, Prof. Dr, (*) *Angers* (Maine et Loire, France), 3 rue de Rabelais.

(C) Lefschetz, Solomon, Prof. Dr, *Princeton* (N. J. U. S. A), University.
(C) Leitner, Roman, Dr, *Kraków*, Hermina Piątka 19.
(C) Leja, Franciszek, Prof. Dr, *Kraków*, Łobzowska 61.
(C) Leray, Jean, Prof. Dr, *Paris* (France), Collège de France, rue des Écoles.
(C) Lesikiewicz, Józef, Mgr, *Katowice*, Mickiewicza 11.
(C) Leśniak, Jan, Dr, *Kraków*, Zygmunta Augusta 5.
(C) Leśnodorski, Gustaw, *Kraków*, Sobieskiego 10.
(Lu) Lewacki, Tadeusz, Mgr, *Lublin*, Al. Racławickie 20b.
(V) Leżański, Tadeusz, Mgr, *Warszawa*, Aleje Ujazdowskie 4, Seminarium Matematyczne.
(V) Lewandowska, Hanna, *Podkowa Leśna Główna*, Storczyków 6.
(Wr) Loria, Stanisław, Prof. Dr, *Wrocław*, Kochanowskiego 5.
(V) Lubański, Mieczysław, *Warszawa-Praga*, Łąkocińska 5.
(C) Łojasiewicz, Stanisław, Mgr, *Kraków*, Ujejskiego 6, m. 3.
(V) Łomnicki, Zbigniew, Mgr, *London*, Polish University College, 5 Prince's Gardens.
(Wr) Łoś, Jerzy, Dr, *Wrocław-Oporów*, Aleja Piastów 40.
(V) Łukasiewicz, Jan, Prof. Dr, *Dublin* (Ireland), 57 Fitzwilliam Square.
(V) Łukaszewicz, Leon, Ing. Mgr, *Warszawa*, Dantyszka 20.
(V) Łuzin, Nikołaj, Prof. Dr, *Moskwa* (U. R. S. S.), l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S., Bolchaya Kaloujskaya 19.
(C) Majcherowa, Genowefa, Mgr, *Kraków*, Św. Benedykta 10.
(Lu) Makarewicz, Józef, Mgr, *Lublin*, Wieniawska 6, m. 47.
(C) Mandelbrojt, S., Prof. Dr, *Paris* VI (France), 20 rue Leverrier.
(Wr) Marczewski, Edward, Prof. Dr, *Wrocław*, Gierymskich 51.
(V) Marczyński, Romuald, Ing. Mgr, *Warszawa*, Noakowskiego 10.
(C) Maroszkowa, Janina, Mgr, *Kraków*, Strzelecka 17.
(C) Matulewicz, Konstanty, *Góra Śląska*, Al. Armii Polskiej 9/2.
(P) Matuszewska, Wanda, Mgr, *Poznań*, Kochanowskiego 8/6.
(V) Maurin, Krzysztof, Mgr, *Warszawa*, Leszno 73.
(Ł) Mazur, Stanisław, Prof. Dr, *Warszawa*, Raszyńska 32, m. 39.

(P) Meder, Józef, Mgr, *Poznań*, Skarbka 37.
(V) Menger, Karl, Prof. Dr, *Chicago* 16 (U. S. A. Ill.) Illinois Inst. of Techn. 5506 N. Wayne St.
(V) Mieńszow, Dimitrij, Prof. Dr, *Moskwa* (U. R. S. S.), (*) Dievitchie Pole, Bojeninowski per 5, kw. 4.
(C) Migoniowa, Helena, *Katowice*, 27 Stycznia 23.
(Wr) Mikusiński, Jan, Prof. Dr, *Wrocław*, Pl. Grunwaldzki 106, m. 123.
(Wr) Montel, Paul, Prof. Dr, *Paris* XIV (France), 79 rue du Faubourg Saint Jacques.
(V) Moore, R. L., Prof. Dr, *Austin* 12 (Tex., U. S. A.), University of Texas.
(Wr) Moroń, Zbigniew, Mgr, *Wrocław*, Olszewskiego 118, m. 3.
(Gd) Mosingiewicz, Kazimierz, Mgr, *Gdańsk-Wrzeszcz* Politechniczna 12/8.
(V) Mostowski, Andrzej, Prof. Dr, *Warszawa* (Czerniaków), Powsińska 24a/6.
(Gd) Naleszkiewicz, Jarosław, Prof. Dr, *Gdańsk-Wrzeszcz*, Żołnierza Tułacza 38.
(V) Spława-Neyman, Jerzy, Prof. Dr, *Berkeley* (Calif., U. S. A.), University of California.
(Gd) Niemunis, Tadeusz, Mgr Ing., *Oliwa*, Liczmańskiego 22/2.
(C) Nikodym, Otton, Prof. Dr, *Gambier* (Ohio, U. S. A.), Department of Mathematics, Kenyon College.
(C) Nikodymowa, Stanisława, Dr, *Gambier* (Ohio, U. S. A.), Department of Mathematics, Kenyon College.
(Wr) Nosarzewska, Maria, Dr, *Wrosław*, Nowowiejska 85/4.
(Gd) Nowacki, Witold, Prof. Dr, *Gdańsk-Wrzeszcz*, Piękna 9.
(Lu) Oktaba, Wiktor, Mgr, *Lublin*, Krucza 4, m. 10.
(Lu) Olekiewicz, Mikołaj, Prof. Dr, *Lublin*, Krakowskie Przedmieście 41/5.
(V) Oleszkiewicz, Mieczysław, *Piaseczno* k. Warszawy, Świętojańska 12.
(P) Orlicz, Władysław, Prof. Dr, *Poznań*, Libelta 14.
(Ł) Otto, Edward, Prof. Dr, *Warszawa*, Lwowska 7.
(Gd) Pawelski, Wacław, Dr, *Gdańsk-Wrzeszcz*, Wajdeloty 6/2.
(V) Pawłowski, Feliks Władysław, *Pau* (France), 3 rue de l'École Normale.

(C) Pearson, Egon Sharpe, Prof. Dr, (*) *London* W. C. 1, (Angleterre) University College, Galton Laboratory.
(Wr) Perkal, Julian, Mgr, *Wrocław Oporów*, Harcerska 24.
(Gd) Pęczalski, Marian, Mgr, *Sopot*, Chrobrego 12.
(Fd) Piątek, Marian, Mgr Ing., *Gdańsk-Wrzeszcz*, Lipowa 10/4.
(P) Piątkowski, Mieczysław, Mgr, *Środa*, Liceum.
(V) Piccard, Sophie, Prof. Dr, *Neuchâtel* (Suisse), Cassardes 14.
(V) Picone, Mauro, Prof. Dr, *Roma* (Italia), Instituto per le Applicazioni del Calcolo.
(Lu) Pidekówna, Halina, *Kraków*, Zacisze 10/9.
(Wr) Plamitzer-Mołodecka, Helena, *Gliwice*, Powstańców 2.
(C) Pogany, Wojciech, Ing., *Kraków*, Św. Marka 8.
(V) Pogorzelski, Witold, Prof. Dr, *Warszawa*, Nowowiejska 22, m. 3.
(C) Popovici, Constantin, Prof. Dr, *Bucharest* (Roumanie), Université, Observatoire Astronomique.
(V) Poprużenko, Jerzy, Prof. Dr, *Łódź*, Żeromskiego 17, m. 28.
(C) Rabsztyn, Józef, Mgr, *Katowice*, Poniatowskiego 17/9.
(P) Rajewski, Marian, Dr, *Poznań*, Lubeckiego 26.
(V) Ramer, Norbert, Mgr, *Kraków*, Św. Tomasza 30, m. 5.
(V) Rasiowa, Helena, Mgr, *Warszawa*, Uniwersytecka 1, m. 17.
(Ł) Roliński, Ignacy, *Łódź*, Więckowskiego 57/11.
(C) Romanowski, Mieczysław, *Kraków*, Fałata 14.
(C) Romanowski, Świętosław, Dr, *Kraków*, Szlak 24.
(C) Rosental, Stefan, Dr, *Copenhague* (Danemark), Fysiks Institut, Blegdamsvej 17.
(C) Roznaus, Antoni, (*) *Zakopane*.
(P) Roszko, Paweł, Mgr, *Poznań*, Niegolewskich 10.
(V) Rubinowicz, Wojciech, Prof. Dr, *Warszawa*, Hoża 74.
(V) Rusiecki, Antoni Marian, *Warszawa*, Nowogrodzka 6a, m. 9.
(Wr) Rybka, Eugeniusz, Prof. Dr, *Wrocław*, Dębowskiego 19.
(P) Ryffertówna, Halina, Mgr, *Poznań*, Grochowska 21.
(Wr) Ryll-Nardzewski, Czesław, Dr. *Wrocław*, Michałowskiego 19.
(P) Schönhuber, Antoni, Prof., *Poznań*, Plac Curie-Skłodowskiej 3.
(C) Sedlak, Stefan, Mgr, *Katowice*, Kopernika 16.
(Ł) Seipelt-Lawęcka, Lidia, Dr, *Łódź*, Nawrot 4.
(C) Sergesco, Pierre, Prof. Dr, *Paris* (France), 7 rue Daubenton.

(V) Sieczka, Franciszek, Ks. Dr, *Radzanów* nad Wkrą, pow. Mława.
(C) Siedmiograj, Zdzisław, Mgr, *Kraków*, Nadwiślańska 1.
(V) Sierpiński, Wacław, Prof. Dr, *Warszawa*, Konopczyńskiego 5/7.
(V) Signorini, Antonio, Prof. Dr, *Rome* (Italie), Academia dei Lincei.
(V) Sikorski, Roman, Dr, *Warszawa*, Al. Ujazdowskie 4, Seminarium Matematyczne.
(V) Singh, Avadhesh Narayan, Prof. Dr, *Lucknow* (India), University.
(Ł) Słowikowski, Jan, *Łódź*, Wigury 11, m. 6.
(Wr) Słupecki, Jerzy, Prof. Dr, *Wrocław-Oporów*, Włodkowica 17.
(P) Smosarski, Władysław, Prof. Dr, *Poznań*, Mazowiecka 15.
(P) Sobaszek, Jan, Mgr, *Poznań*, Hetmańska 31.
(P) Sroka, Aleksander, Mgr, *Poznań*, Rokossowskiego 84.
(V) Stankiewicz, Eugeniusz, Mgr, *Warszawa*, Nowowiejska 28.
(Wr) Stark, Marceli, Mgr, *Wrocław*, Piastowska 43.
(Wr) Steinhaus, Hugo, Prof. Dr, *Wrocław*, Orłowskiego 15.
(V) Straszewicz, Stefan, Prof. Dr, *Warszawa*, Nowowiejska 22, m. 25.
(Lu) Subotowicz, Mieczysław, *Lublin*, Weteranów 34, m. 8.
(P) Suszko, Roman, Dr, *Poznań*, Lubeckiego 26.
(Wr) Szalajko, Kazimierz, Mgr, *Gliwice*, Orlickiego 3, m. 4.
(C) Szarski, Jacek, Doc. Dr, *Kraków*, Rynek Główny 6.
(P) Szczeniowski, Szczepan, Prof. Dr, *Poznań*, Grunwaldzka 14.
(V) Szmielew, Wanda, Mgr, *Warszawa*, Filtrowa 30.
(Ł) Szmuszkowicz, Hanna, Mgr, *Łódź*, Daszyńskiego 17, m. 19.
(C) Szmydt, Zofia, Dr, *Kraków*, 18 Stycznia 28, m. 3.
(P) Szukalski, Konrad, Mgr, *Poznań*, Daszyńskiego 29/9a.
(V) Szymański, Piotr, Dr, *Warszawa*, Czerwonego Krzyża 12, m. 14.
(Wr) Ślebodziński, Władysław, Prof. Dr, *Wrocław*, Michałowskiego 26.
(C) Średniawa, Bronisław, Dr, *Kraków*, Polna 21, m. 3.
(Gd) Tarnawski, Eustachy, Mgr, *Sopot*, Armii Czerwonej 69.
(C) Tarnawski, Zygmunt, *Mysłowice*, Krakowska 3/3.
(V) Tarski, Alfred, Prof. Dr, *Berkeley* 8, 1001 Cragmont Ave, (Calif., U. S. A.).

(C) Tatarkiewicz, Krzysztof, Mgr, *Kraków*, Lenartowicza 18, m. 4.
(C) Titz, Henryk, Dr, *Kraków*, Św. Tomasza 27.
(C) Trynk, Krystyna, Mgr, *Kraków*, Zygmunta Augusta 5.
(C) Turowicz, Andrzej, Dr, Opactwo *Tyniec* pod Krakowem.
(Gd) Turska, Olga, Mgr, *Gdańsk-Wrzeszcz*, Batorego 13.
(Gd) Turski, Stanisław, Prof. Dr, *Warszawa*, Konopczyńskiego 6/7.
(Wr) Ulam, Stanisław, Prof. Dr, *Los Alamos* Laboratory (New Mexico, U. S. A.), p. o. box 1663.
(Lu) Urbański, Włodzimierz, Prof. Dr, *Lublin*, Słowackiego 11.
(V) Wakulicz, Antoni, Dr, *Katowice-Ligota*, Piotrowicka 3.
(V) Walfisz, Arnold, Prof. Dr, *Tyflis* (U. R. S. S.), Saba-Solkhana 11.
(Wr) Warmus, Mieczysław, Mgr, *Wrocław*, Katowicka 58, m. 1.
(C) Ważewski, Tadeusz, Prof. Dr, *Kraków*, Starowiślna 77.
(Gd) Wełniak, Jan, Mgr, *Gdańsk-Wrzeszcz*, Sienkiewicza 2.
(C) Weyssenhoff, Jan, Prof. Dr, *Kraków*, Słowackiego 15.
(C) Węgrzynowicz, Leopold, *Kraków*, Krowoderska 46.
(P) Węgrzynowicz, Marian, *Poznań*, Matejki 52.
(C) Whyburn, Gordon T., Prof. Dr, *Charlottesville* (U. S. A., Va), University of Virginia.
(Wr) Wilkoński, Andrzej, Mgr, *Wrocław*, Al. Piastów 83.
(V) Winogradow, I., Prof. Dr, *Moskwa* 49 (U. R. S. S.), Bolszaja Kaluskaja 19, Mat. Inst. Akad. Nauk.
(Ł) Wiśniewski, Feliks, Prof. Dr, *Łódź*, Al. Kościuszki 52/2.
(P) Witkowski, Józef, Prof. Dr, *Poznań*, Stary Rynek 95—96.
(Ł) Włodarski, Lech, Mgr, *Łódź*, Piotrkowska 85, m. 6.
(Wr) Wolibner, Witold, Dr, *Wrocław*, Łukasiewicza 12.
(C) Wrona, Włodzimierz, Dr, *Kraków*, Gramatyka 7.
(C) Wróbel, Tadeusz, Mgr, Ing., *Kraków*, Radziwiłłowska 8.
(V) Wundheiler, Aleksander, Dr, *Chicago* III (U. S. A.), Illinois Institute of Technology.
(Gd) Wysocki, Józef, Prof. Ing, *Oliwa*, Al. Sprzymierzonych 30.
(Ł) Zahorski, Zygmunt, Prof. Dr, *Łódź*, Kilińskiego 50, m. 48.
(C) Zakrocki, Stanisław, *Kraków*, I Gimn., Plac na Groblach.
(V) Zarankiewicz, Kazimierz, Prof. Dr, *Warszawa*, Wawelska 19, m. 20.

(C) Zaremba, Stanisław Krystyn, Prof. Dr, *London*, Polish University College, 5 Prince's Gardens.
(P) Zeidler, Franciszek, Dr, *Poznań*, Karwowskiego 24.
(V) Zermelo, Ernst, Prof. Dr, (*) *Freiburg*, Karlstr. 60.
(P) Znamierowski, Czesław, Prof. Dr, *Poznań*, Grottgera 16.
(P) Zygmanowski, Franciszek, Mgr, *Poznań*, Hetmańska 5.
(V) Zygmund, Antoni, Prof. Dr, *Chicago* 37 (U. S. A., Ill.), University of Chicago, Department of Mathematics.
(V) Zygmundowa, Irena, Dr, *Chicago* 37 (U. S. A., Ill.) 6024 Ellis Av.
(V) Żorawski, Kazimierz, Prof. Dr, *Warszawa*, Uniwersytecka 5, m. 9.
(Ł) Żyliński, Eustachy, Prof. Dr, *Gliwice*, Politechnika.

LISTE DES MEMBRES DÉCÉDÉS

(C) Stankiewicz, Lidia, Dr, *Kraków*.
(C) Stamm, Edward, *Wieliczka*.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES DES SECTIONS

SECTION DE CRACOVIE

26. X. 1948. Leja, F. *Une nouvelle démonstration d'un théorème de F. Hartogs sur les séries de fonctions analytiques* [à paraître dans les Acta de la Acad. Nac. de Lima].

9. XI. 1948. Leitner, R. *Formules linéaires pour l'ortogonalisation d'un système de vecteurs.*

Théorème 1. *Tout système de vecteurs linéairement indépendants:*

$$b^{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

peut être transformé en un système ortogonal:

$$e^{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

de façon que les vecteurs subissent simultanément une transformation conservant leur indépendance et telle que leurs extrémités se déplacent d'un mouvement uniforme et rectiligne. Cette transformation est donnée par les formules:

$$p^{ij}(t) = t \cdot e^{ij} + (1 - t)\, b^{ij}. \tag{3}$$

Théorème 2. *Lorsque l'orientation du système* (1) *est égale à celle du système de coordonnées, alors le système* (1) *peut être transformé par un mouvement analytique et conservant l'indépendance (les formules définissant ce mouvement étant des polynômes des variables t, $\cos t$, $\sin t$) en verseurs du système de coordonnées. Lorsque, cependant, l'orientation du système* (1) *est différente de celle du système de coordonnées, alors un des vecteurs* (1) *se transforme en verseur correspondant opposé.*

Théorème 3. *Étant donné deux systèmes de vecteurs linéairement indépendants ayant la même orientation, il existe un système de vecteurs qui sont des fonctions analitiques du paramètre t, tel que pour $t=0$ et $t=1$ il est identique au premier, resp. au second système donné, tandis que pour toute valeur entre* 0 *et* 1 *il forme un système de vecteurs linéairement indépendants.*

16. XI. 1948. Krzyżański, M. *Un théorème concernant le problème de Dirichlet pour l'équation du type elliptique avec les conditions aux limites discontinues.*

Le sujet de cette communication sera contenu dans le travail: *Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique, discontinues sur la frontière du domaine de leur existence*, qui va paraître dans les Studia Mathematica, vol. XI.

30. XI. 1948. Ważewski, T. *Remarques relatives aux certains théorèmes de M. Banachiewicz* (première partie).

L'auteur appelle deux procédés de calcul P et Q numériquement identiques lorsqu'ils dictent les calculs identiques. Une machine automatique fonctionnant suivant P fonctionnera donc suivant Q et inversement.

Soit (U) le système d'équations $\sum_{\beta=1}^{n+1} u_{i\beta} x_\beta = 0$ avec $x_{n+1} = 1$ ou, sous forme abrégée, $u_i = 0$, $(i = 1, \dots, n)$. Certains mineurs de la matrice $u = \|u_{i\beta}\|$ $(i = 1, \dots, n;\ \beta = 1, \dots, n+1)$ n'étant pas nuls, il existe, suivant un théorème (T_1) dû à M. T. Banachiewicz, deux matrices „en escalier" bien déterminées $\lambda = \|\lambda_{\gamma\delta}\|$, $w = \|w_{i\beta}\|$, telles que $\lambda_{\gamma\delta} = 0$ pour $\delta > \gamma$, $w_{i\beta} = 0$ pour $i > \beta$, $w_{ii} = 1$ et

$$u = \lambda \cdot w. \tag{1}$$

De l'équation (1) on peut calculer, par un procédé (Λ_1) les éléments de λ et w, et on réduit ainsi la solution de (U) à celle du système „en escalier" équivalent au système (W) de la forme $\sum_{\beta=1}^{n+1} w_{i\beta} x_\beta = 0$, ou, sous forme abrégée, $w_i = 0$ $(i = 1, \dots, n)$.

Le procédé Λ_1 constitue une méthode de solution de (U) (ou, plutôt, une méthode d'un passage de (U) à (W)) „au moyen des matrices").

Il exige du calculateur la connaissance de la façon dont on multiplie les matrices. Or l'auteur remarque que (A_1) est numériquement identique à un procédé (B_1) (procédé de Dolittle) intervenant dans la méthode élémentaire de substitutions (ou d'éliminations) succesives légèrement modifiée. (On trouve w_1 au moyen de u_1 et w_{i+1} au moyen de $w_1, \ldots, w_i$, u_{i+1}). Bien que A_1 et B_1 soient numériquement identiques du point de vue d'une machine automatique, (A_1) est plus commode pour un calculateur pour les raisons psychologiques. — Un théorème (T_2) analogue à (T_1), dû aussi à M. Banachiewicz se rapporte au cas où (U) représente le système intervenant dans la méthode des moindres carrés. Il sert de base à un procédé (A_2). L'auteur remarque qu'un procédé bien connu d'éliminations successives, procédé (B_2) intervenant dans la détermination de la signature d'une forme quadratique, est numériquement identique à (A_2).

L'auteur appelle deux matrices g et h successivement équivalentes lorsque pour $k = 1, 2, \ldots$, les vecteurs dont les coordonnées interviennent dans k premières lignes de g forment un système équivalent à un système analogue pris dans h. L'auteur communique les théorèmes:

I) *Il existe une matrice λ, en escalier, telle que $g = \lambda \cdot h$.* — De là on peut déduire (T_1). II) *p étant une matrice symétrique (dont certains mineurs ne sont pas nuls) il existe deux matrices en escalier q et r qui, avec leurs transposées q' et r', vérifient les relations*

$$r = r', \qquad p = qrq' = (qr)\,q' = q\,(rq') \tag{2}$$

(résultat obtenu en collaboration avec M. Szarski). Les matrices qr et rq' sont en escalier. (Pour la suite voir la conférence du 18. XII. 1948).

30. XI. 1948. Banachiewicz, T. *Sur la résolution déterminée des équations normales de la méthode des moindres carrés à l'aide des cracoviens.*

L'auteur a réussi en 1938 (Bull. Acad. Polon. d. Sc., série A, pp. 134 et 393) à se débarasser de la méthode d'élimination dans la solution d'un système des équations linéaires. Pour les équations normales de la méthode des moindres carrés sa méthode mène à l'extraction de la racine carrée particulière du tableau des coefficients et consiste en trois étapes: 1) extraction de la racine carrée, 2) division de la colonne des termes libres par cette racine, 3) nouvelle division pour la détermination des inconnues. En 1947 l'auteur a réduit les deux premières étapes ci-dessus à une seule: l'extraction de la racine carrée du tableau ci-dessus convenablement bordé, et c'est cette méthode qui est l'objet de la communication. On joint aux m' équations données la $(m+1)$-e équation ayant pour coefficients les termes libres consécutifs du système donné, et pour terme libre un nombre inconnu ϱ^2, supposé tel que les $m+1$ équations forment un système compatible. On extrait la racine carrée du tableau symétrique obtenu de cette façon; l'inconnaissance de ϱ^2 ne fait obstacle grâce à ce qu'on sait que la racine carrée doit avoir la forme d'un trangle tronqué, dont le dernier

élément est zéro. — Cette manière de résoudre les équations normales a entre autres l'avantage de réunir en une seule théorie les considérations relatives aux équations conditionnées (cas géodésique ordinaire) et celles-ci relatives aux équations non-conditionnées (cas astronomique ordinaire). Il paraît que le nouvel algorithme de la méthode des moindres carrés, devrait remplacer celui de Gauss.

14. XII. 1948. Ważewski, T. *Théorème de M. Banachiewicz relatif à la méthode des moindres carrés. Remarques méthodologiques* (deuxième partie).

En gardant les notations et la terminologie de la conférence précédente l'auteur démontre que de la relation (2) résulte le théorème (T_2) de M. Banachiewicz. L'auteur fait observer que les théorèmes (T_1) et (T_2) de M. Banachiewicz peuvent être exprimés dans le langage des matrices ordinaires. L'auteur analyse le rôle des „cracoviens". Au lieu de multiplier les matrices ligne par colonne (façon F_1) on peut tourner les matrices de manière que *le même* calcul revienne à multiplier colonne par colonne (façon F_2) ou ligne par ligne (façon F_3) etc. Huit façons de cette sorte sont possibles. M. Banachiewicz appelle „cracoviens" les tableaux multipliés de la façon F_2. La théorie des cracoviens est évidemment isomorphe à celle des matrices et le passage de l'une à l'autre est immédiat. En ce sens *chaque* théorème relatif à la théorie des matrices constitue aussi un théorème relatif à celle des cracoviens et inversement. — Dans les procédés A_1 et A_2 M. Banachiewicz s'est servi dès le commencement de la notion de cracovien. Ceci a conduit à une opinion que le mécanisme mathématique de A_1 et A_2 n'est possible que grâce à cette notion. Cette opinion n'est pas exacte, car en passant des cracoviens aux matrices on obtient des procédés numériquement identiques. L'avantage psychologique provenant de la multiplication colonne par colonne peut être acquis sans cracoviens. Il suffit à cet effet d'introduire la directive que le théoricien doit tourner d'abord les matrices de manière à multiplier colonne par colonne et d'adresser ensuite l'algorithme en question au calculateur. — La multiplication des cracoviens n'étant pas commutative il est plus pratique de se servir des matrices dans les considérations théoriques. Au besoin il suffit de tourner les matrices à *la fin* de ces considérations.

Le lien théorique mutuel entre les procédés A_1 et A_2 ne consiste pas évidemment en emploi des cracoviens. L'auteur remarque qu'un tel lien consiste en ce que ces procédés constistuent une algorithmisation au moyen des matrices de deux différents spécimens connus de la méthode des éliminations successives.

Les résultats en question de M. Banachiewicz peuvent être ainsi classés comme appartenant à un domaine des recherches plus vaste dont la direction à prendre consiste à algorithmiser, dans le sens précédent, les autres cas connus de la méthode des éliminations successives, pour obtenir des procédés numériquement identiques, mais présentant des avantages psychologiques pour le calculateur.

25. I. 1949. **Leja, F.** *Sur un théorème de M. S. Bernstein.*

Soit $P(z)$ un polynôme du degré n et du module $|P(z)| \leqslant M$ dans l'intervalle $-1 \leqslant z \leqslant 1$, alors

$$|P(z_0)| \leqslant M(a+b)^n,$$

où a et b sont les demi-axes de l'ellipse passant par z_0 des foyers $z=-1$ et $z=+1$.

Ce théorème de M. Berstein peut être généralisé comme il suit: *Soit D un domaine plan contenant $z=\infty$, F la frontière de D, C l'ensemble complémentaire à $D+F$, $w=g(z)$ la représentation conforme de D sur le cercle $|w|<1$ telle que $g(\infty)=\infty$, $P(z)$ et $Q(z)$ deux polynômes des degrés n et m respectivement et z_0 un point quelconque de D, alors*:

1⁰ *si $|P(z)| \leqslant M$ dans F on a*

$$|P(z_0)| \leqslant M \cdot |g(z_0)|^n$$

2⁰ *si $|P(z):Q(z)| \leqslant M$ dans F et si les zéros de $Q(z)$ sont contenus dans C on a*

$$\left|\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}\right| \leqslant M \cdot |g(z_0)|^{n-m}.$$

1. II. 1949. **Banachiewicz, T.** *Sur la résolution indéterminée des équations de la méthode des moindres carrés à l'aide des cracoviens.*

La résolution en question est équivalente au problème de la détermination des poids des inconnues et de leurs fonctions linéaires, le problème qui pendant un siècle a été l'objet des études d'une pléiade des mathématiciens et astronomes avec Gauss à la tête. Les diverses solutions, par l'algèbre ordinaire s'avérèrent en pratique si peu compréhensibles qu'on se contentait souvent à y employer la règle de Gauss sur le poids de la dernière inconnue, règle très simple, mais demandant des calculs étendus. Les cracoviens y apportent (1938) une révolution, en ramenant la résolution numérique du problème à 3 opérations élémentaires du calcul cracovien: extraction de la racine carrée (d'un tableau), son inversion et l'élévation (de l'inverse) au carré. Si r est la racine carrée du tableau des coefficients a des équations normales, on calcule $q=r^{-1}$ et la solution est donnée par la formule

$$a^{-1} = q^2 \tag{1}$$

a^{-1} étant le tableau cherché. Le calcul se fait en opérant avec les tableaux (cracoviens), et non avec les équations, ce qui contribue à le rendre encore plus facile. En posant $a=g\cdot h$, avec le choix convenable de g et h, le calcul demandte un peu moins d'opérations arithmétiques, en devenant alor toutefois moins transparent.

Dans le cas embrassé par la règle de Gauss, relative au poids de la dernière inconnue, l'équation (1) donne une règle plus générale: la failli-

bilité de la i-me inconnue (i étant arbitraire) est égale au module de la i-me colonne de q.

Présentés à l'aide des matrices les résultats ci-dessus perdent leur élégance mathématique et deviennent moins utiles pour le calculateur.

8. III. 1949. Krzyżański, M. *Sur les bornes, supérieure et inférieure des solutions de l'équation linéaire du type elliptique.*

Étant donnée l'équation du type elliptique à coefficients continus

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f, \tag{1}$$

si $c \leqslant 0$ et $f > 0$, (resp. $f < 0$), une solution de (1), régulière dans un domaine fermé, limité D ne peut pas atteindre à l'intérieur de ce domaine la borne supérieure, si elle est positive, (resp. si $f < 0$ — inférieure, si elle est négative). Ceci est évident.

Or on peut démontrer, que si $c \leqslant 0$ et $f \geqslant 0$ (resp. $f \leqslant 0$) la solution $u(P)$ atteint la borne supérieure (resp. inférieure), si elle est positive (resp. négative), sur FD. En effet, soit $M > 0$ la borne supérieure de $u(P)$ dans D et, supposons que l'on ait $u(P) \leqslant M' < M$ sur FD, M' étant positif. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}(M - M')$.

La fonction $u(P)$ étant uniformément continue dans $\bar{D}$, il existe un domaine D', tel que $D' + FD' \subset D$ et que $u(P) < M' + \varepsilon$ sur FD'. Posons: $u = u^* - we^{\lambda x_m}$, w et λ étant des constantes positives, qui seront convenablement choisies dans la suite. L'équation (1) se transforme en l'équation:

$$\varepsilon[u^*] = f + w(a_{mm}\lambda^2 + b_m \lambda + c)\, e^{\lambda x_m}.$$

Les coefficients de (1) étant bornés dans $D' + FD'$ et a_{mm} étant positif, on peut choisir le nombre λ de façon que le trinôme aux parenthèses soit positif. Alors $\varepsilon[u^*] > 0$, par suite u^* ne peut pas atteindre dans D la borne supérieure positive. Or on a

$$u^* < M' + \varepsilon + we^{\varrho} \text{ sur } FD', \text{ où } \varrho = \sup|\lambda x_m| \text{ sur } FD'$$

et cette inégalité subsiste dans D', on a donc à fortiori:

$$u < M' + \varepsilon + we^{\varrho} \quad \text{dans} \quad D'.$$

Choisissons $w = \varepsilon \cdot e^{-\varrho}$. Alors: $u < M' + 2\varepsilon = M$ dans D'.

Or P_0 étant un point quelconque de D, on peut choisir D' de façon que $P_0 \subset D'$. Il en résulte, que la borne supérieure de $u(P)$ est inférieure à M, contrairement à l'hypothèse.

On a donc $M' \geqslant M$ et par suite $u(P)$ atteint la borne supérieure M sur FD.

26. IV. 1949. Miodoński. *Principes du raisonnement employé en médecine.* [Conférence populaire appartenant au cycle: *Le rapport entre mathématiques et autres disciplines*].

10. V. 1949. Wrona, W. *The Riemannian curvature and its generalization, I.*

17. V. 1949. Wrona, W. *The Riemannian curvature and its generalization, II.*

The subject of both communications is contained in the papers:

1. *Conditions nécessaires et suffisantes qui déterminent les espaces Einsteiniens, conformément euclidiens et de courbure constante.* Annales de la Soc. Pol. de Math., vol. XX.

2. „*On multivectors in a $V_n - I$ and II*". Koninklijke Nederladsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings, vol. LI, No. 10, 1948.

24. V. 1949. Leja, F. *Sur une méthode d'approximation des fonctions réelles d'une variable complexe.*

Soit E un ensemble plan borné et fermé, $f(z)$ une fonction réelle continue dans E, λ un paramètre réel et $\zeta=\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ un système de $n+1$ points de E. Posons

$$\Phi_n^{(j)}(z; \lambda f, \zeta)=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}\left[\frac{z-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k}\cdot e^{\lambda\cdot f(\zeta_j)}\right], \quad j=0, 1, \ldots, n,$$

et

$$\Phi_n(z; \lambda f)=\inf_{\zeta\epsilon E}\left\{\sum_{j=0}^{n}|\Phi_n^{(j)}(z; \lambda f, \zeta_j)|\right\}, \quad n=1, 2, \ldots$$

On démontre que, si E ne possède pas des points intérieurs et ne partage pas le plan, il existe dans E la limite itérée

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{\Phi_n(z; \lambda f)}\right\}^{1/\lambda}=f(z).$$

31. V. 1949. Matulewicz, K. *Sur les nombres composés satisfaisant à la congruence* $2^n\equiv 2 \pmod n$.

L'auteur a trouvé une méthode qui permet de déterminer des solutions composées de la congruence:

(1) $$2^n\equiv 2 \pmod n.$$

Cette méthode est appuyée sur le théorème suivant:

Soit p un nombre premier >2 et soit:

(2) $$2^{p-1}-1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k},$$

où p_l *sont des nombres premiers. Supposons que:*

(3) $$p_j - 1 = s_j(p-1) \quad \text{et} \quad p_l - 1 = s_l(p-1).$$

où s_j *et* s_l *sont des nombres entiers. Dans ces hypothèses le nombre composé* $n = p_j \cdot p_l$ *est une solution de la congruence* (1).

Démonstration. D'après (2):

(4) $$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p_j p_l}.$$

Il en résulte, d'après (3):

(5) $$2^{p_j - 1} = 2^{s_j(p-1)} \equiv 1 \pmod{p_j p_l}.$$

D'une façon analogue:

(6) $$2^{p_l - 1} = 2^{s_l(p-1)} \equiv 1 \pmod{p_j p_l}.$$

Il s'ensuit de (5) et (6):

(7) $$2^{p_j + p_l - 2} \equiv 1 \pmod{p_j p_l}.$$

D'autre part, d'après (5):

(8) $$2^{p_j p_l - (p_j + p_l) + 1} = 2^{(p_j - 1)(p_l - 1)} \equiv 1 \pmod{p_j p_l}.$$

En multipliant les congruences (7) et (8) on obtient:

(9) $$2^{p_j p_l - 1} \equiv 1 \pmod{p_j p_l},$$

d'où:

(10) $$2^{p_j p_l} \equiv 2 \pmod{p_j p_l},$$

ce qui termine la démonstration.

14. VI. 1949. Tatarkiewicz, K. *Sur la convexité des sphères et sur l'approximation dans les espaces de Banach.* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 227 (1948), p. 1332—1333].

21. VI. 1949. Biernacki, M. *Sur quelques applications de la formule de Parseval* [à paraître dans les Annales UMCS, section A, t. IV].

21. VI. 1949. Ważewski, T. *Sur la différentiation des séries.*

$F(t)$ étant une fonction continue dans $a \leqslant t \leqslant b$ aux valeurs appartenant à un espace vectorial normé de Banach et dont une certaine dé-

rivée droite (calculée au moyen d'une certaine suite de valeurs de t) satisfait à l'inégalité $|DF(t)| \leqslant k$ on a $|F(b)-F(a)| \leqslant k|b-a|$. L'auteur remarque que, au cas des espaces complets, ce théoréme sur les accroissements finis permet de généraliser le théorème classique $\left(\sum F_n(t)\right)' = \sum F'_n(t)$ valable dans une hypothèse bien connue. Il est aussi valable relativement aux dérivées droites ou gauches au cas des $F_n(t)$ continues. — Si une suite $DF_n(t)$ tend uniformément vers 0 dans $[a,b]$, $F_n(t_0)$ converge vers un point c et les $F_n(t)$ sont continues, alors la suite $F_n(t)$ converge uniformément dans $[a,b]$ vers le point constant c (théorème sur „l'arrondissement des angles" au passage à la limite).

28. VI. 1949. Ważewski, T. *Sur l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles.*

L'auteur construit deux définitions non équivalentes de la coïncidence asymptotique des intégrales de deux systèmes des équations différentielles et communique certains théorèmes sur ce sujet (un résumé plus détaillé paraîtra dans le Bull. de l'Acad. Pol. de Sc. et de Lettres, séance du Juin 1949).

28. VI. 1949. Krzyżański, M. *Sur l'équation aux dérivées partielles de la diffusion sous l'action d'une force* [à paraître dans les Annales de la Soc. Pol. de Math.].

SECTION DE GDAŃSK

24. V. 1949. Turski, St. *Sur les applications des fonctions analytiques à quelques problèmes techniques.*

SECTION DE LUBLIN

1. VII. 1949. Mostowski, A. *Les phrases indécidables dans l'arithmétique des nombres réels.*

1. VII. 1949. Orlicz, W. *Sur les suites des opérations dépendant d'un paramètre.*

7. VII. 1949. Gołąb, St. *Sur les objets géométriques de deuxième classe.*

7. VII. 1949. Ważewski, T. *Sur l'allure asymptotique des integrales des équations différentielles.*

SECTION DE ŁÓDŹ

11. X. 1948. **Mazur, S.** *Sur les espaces linéaires, métriques et compacts.*

L'auteur démontre: Un espace linéaire, métrique et complet est isomorphe avec un espace F. Ce théorème donne la résolution affirmative d'un problème posé par S. Banach (cf. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932, p. 232).

25. X. 1948. **Janowski, W.** *Sur le maximum d'argument des fonctions univalentes bornées.*

Considérons les fonctions holomorphes univalentes dans le cercle $|z|<1$ de la forme:

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

Soit M un nombre positif quelconque, F_M la famille de toutes les fonctions bornées de la forme (1) assujetties à la condition $|F(z)|<M$, et F_∞ — la famille de toutes les fonctions de la forme (1).

La valeur de z étant fixée, nous considérons l'expression

$$\arg\frac{F(z)}{z}, \tag{2}$$

où l'on prend la branche de l'argument qui est égale à 0 pour $z=0$.

L'auteur a démontré les théorèmes suivants:

I. *Pour les fonctions de la famille F_M on a l'inégalité précise:*

$$\left|\arg\frac{F(z)}{z}\right| \leqslant \varphi_M, \tag{3}$$

où φ_M et ϱ_M $(0<\varrho_M<|z|)$ satisfont aux équations:

$$\varphi_M = \frac{1-\left(\frac{\varrho_M}{M}\right)^2}{1+\left(\frac{\varrho_M}{M}\right)^2}\cdot\log\left(\frac{1-\frac{\varrho_M}{M}}{1+\frac{\varrho_M}{M}} : \frac{1-|z|}{1+|z|}\right), \tag{4}$$

$$\frac{2\cdot\frac{\varrho_M}{M}}{1+\left(\frac{\varrho_M}{M}\right)^2}\cdot\log\left(\frac{1-\frac{\varrho_M}{M}}{1+\frac{\varrho_M}{M}} : \frac{1-|z|}{1+|z|}\right) + \log M\cdot\frac{1-|z|^2}{|z|\cdot\left(\frac{M}{\varrho_M}-\frac{\varrho_M}{M}\right)} = 0. \tag{5}$$

II. *Pour les fonctions de la famille F_∞ on a l'inégalité précise:*

$$\left|\arg\frac{F(z)}{z}\right| \leqslant \varphi_\infty \tag{6}$$

où

$$\varphi_\infty = \log\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{7}$$

SECTION DE POZNAŃ

22. XI. 1948. Butlewski, Z. *Sur les intégrales oscillantes de certains systèmes d'équations différentielles ordinaires.*

10. XII. 1948. Roszko, P. *Développements de méthodes didactiques dans les mathématiques au XX siècle et les programmes actuels.*

19. II. 1949. Mikusiński, J. *Sur un anneau linéaire pseudonormé et ses applications dans la théorie des opérateurs.*

26. II. 1949. Jaśkowski, S. *Théorie mathématique des ornements.*

27. II. 1949. Makarski, J. *Une démonstration du théorème de Jordan.*

28. V. 1949. Krzyżański, M. *Les applications de fonctions majorantes dans les démonstrations d'existence des solutions des équations partielles de 2^e^ ordre.*

1. VI. 1949. Smosarski, Wl. *Les arrées de tétraèdres de volume maximé inscrits dans l'ellipsoïde.*

1. VI. 1949. Suszko, R. *Les progrès de la logique mathématique.*

SECTION DE VARSOVIE

15. XI. 1948. Szmielew, W. *Sur une certaine classification des groupes commutatives.*

15. XI. 1948. Sikorski, R. *On an ordered algebraic field.*

Let W_n be the least algebraic field containing the set P_n of all ordinals $\xi < W_n$ (the algebraic operation in P_n are Hessenberg's natural sum and natural product of ordinals). In the ordered field W_n one can define, in a very natural way, the limit of a sequence $a_\xi \epsilon W_n$ of type w_n. The field W_n fulfils the following theorem, analogous to the well-known theorem of Bolzano-Weierstrass:

„Every bounded sequence $a_\xi \epsilon W_n$ of type w_n contains a convergent subsequence".

A character of an ordered algebraic field F is the initial ordinal w_n which is co-final with F. The field W_n is of character w_n. It is the least ordered field of character w_n, that is: *„Every ordered field F of character w_n contains a subfield F_0 isomorphic to W_n*.

19. XI. 1948. Ważewski, T. *Sur les cracoviens.*

19. XI. 1948. Orlicz, W. *Remarque du domaine de l'analise fonctionnelle.*

19. XI. 1948. Mostowski, A. *Remarque sur la non-contradiction des alephs inaccessibles.*

L'auteur montre que le théorème meta-mathématique: „l'existence des alephs inaccessibles est non-contradictoire" est indémontrable dans le système ordinaire de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel".

25. II. 1949. Sierpiński, W. *Sur un problème de M. Zarankiewicz.*

25. II. 1949. Sierpiński, W. *Sur un exemple de M. Kunugui.*

6. V. 1949. Zarankiewicz, K. *Impressions de mon voyage scientifique en Amérique.*

13. V. 1949. Sierpiński, W. *Sur la somme des nombres transfinis.*

13. V. 1949. Sierpiński, W. *Sur les suites des fonctions doubles.*

13. V. 1949. Wrona, W. *Mesure de courbure de Riemann et sa généralisation.*

27. V. 1949. Sierpiński, W. *Un théorème sur les fonctions d'ensemble.*

27. V. 1949. Wakulicz, A. *Sur la somme de quatre nombres transfinis.*

31. V. 1949. Kuratowski, K. *Compte-rendu de mon voyage scientifique aux États-Unis.*

10. VI. 1949. Sierpiński, W. *Compte-rendu de mon voyage scientifique aux Indes.*

SECTION DE WROCŁAW [1]

28. IX. 1948. Čech, E. *Sur les courbes de Bertrand.*

22. X. 1948. Hartman, S. *Sur quelques suites singulières.*

22. X. 1948. Ingarden, R. *Sur une application physique du théorème inverse au théorème de Apollonius.*

29. X. 1948. Spencer, J. *Measuring of sun distance.*

29. X. 1948. Kuratowski, K. *Sur l'espace des transformations homéomorphes.*

5. XI. 1948. Warmus, M. *Évaluation des corrections dans les calculs des champs des domaines plans à l'aide d'un réseau rhomboïdal.*

5. XI. 1948. Mikusiński, J. *Une nouvelle fondation du calcul de Heaviside'a.*

19. XI. 1948. Nosarzewska, M. *Sur la convergence uniforme dans quelques classes des fonctions.*

26. XI. 1948. Sierpiński, W. *Sur une définition des espaces complets.*

26. XI. 1948. Sierpiński, W. *Sur un problème de M. Mostowski.*

3. XII. 1948. Steinhaus, H. *Remarques sur le contrôle par-ci par-là des produits en masse.*

10. XII. 1948. Mikusiński, J. *Sur la notion d'un espace complet pour les espaces (L) de M. Fréchet.*

14. I. 1949. Steinhaus, H. *Sur les suites accidentales.*

14. I. 1949. Greniewski, H. *Sur quelques systèmes des phrases.*

---

[1] Les résumés et les notices bibliographiques concernant les communications présentées pendant les séances de la Section de Wrocław vont paraître dans le Colloquium Mathematicum II.

21. I. 1949. Čech, E. *Sur la notion de la tangente.*

4. II. 1949. Krzyżański, M. *Sur les problèmes aux limites pour les équations du type elliptique dans les domaines non bornés.*

4. II. 1949. Mikusiński, J. *Sur une équation fonctionnelle.*

11. II. 1949. Wilkowski, A. *Sur l'évaluation des modules de racines d'une équation du degré n.*

18. II. 1949. Steinhaus, H. *Sur la convergence statistique de suites des nombres et sur la convergence asymptotique de suites des fonctions.*

18. II. 1949. Marczewski, E. *Sur le théorème de M. Tychonoff.*

4. III. 1949. Ryll-Nardzewski, Cz. *Sur les fonctionnelles linéaires dans les espaces du type* (B_0).

11. III. 1949. Banachiewicz, T. *Quelques opérations cracoviennes.*

18. III. 1949. Ważewski, T. *Une méthode algorithmique dans la théorie des équations différentielles.*

18. III. 1949. Sikorski, R. *Sur la théorie des corps de Boole.*

25. III. 1949. Marczewski, E. *Un critère pour l'additivité dénombrable de la mesure.*

25. III. 1949. Łoś, J. *Sur le prolongement de la mesure.*

29. III. 1949. Čech, E. *Les polyèdres dans l'enseignement dans les universités.*

29. III. 1949. Ślebodziński, W. *Quelques remarques sur le „programme d'Erlangen" de F. Klein.*

1. IV. 1949. Warmus, M. *Sur la calculation des champs des domaines plans à l'aide des réseaux étant les images affiniques d'un réseau quadratique.*

5. IV. 1949. Intrator, J. *Sur une décomposition d'un nombre naturel en somme de n nombres naturels.*

5. IV. 1949. Hartman, S. *Sur l'approximation des nombres naturels par les nombres rationnels satisfaisant à certaines conditions supplementaires.*

5. IV. 1949. Hartman, S. *Une remarque sur la convergence asymptotique.*

8. IV. 1949. Wolibner, W. *Sur un mouvement plan d'un fluide incompressible gluant.*

6. V. 1949. Kulczyński, S. *Sur la notion de la probabilité.*

10. V. 1949. Słupecki, J. *Sur une définition de la probabilité finie.*

13. V. 1949. Zięba, A. *Un théorème sur la théorie de la poursuite.*

13. V. 1949. Mikusiński, J. *Sur les fondements du calcul des opérateurs.*

16. V. 1949. Infeld, L. *Les problèmes de la cosmogonie moderne.*

20. V. 1949. Obalski, J. *Les fondements mathématiques d'action des instruments pour mesurer les champs.*

27. V. 1949. Jaśkowski, S. *Sur la théorie mathématique des ornements.*

27. V. 1949. Jaśkowski, S. *Sur l'importance des fondements dans l'enseignement des mathématiques.*

3. VI. 1949. Szarski, J. *L'application des inégalités différentielles dans la théorie des équations différentielles.*

7. VI. 1949. Perkal, J. *Sur certaines corrélations.*

10. VI. 1949. Vyčichlo, F. *Sur le développement de la géométrie dans la Tchécoslovaquie.*

14. VI. 1949. Słupecki, J. *Sur les algèbres complètes.*

14. VI. 1949. Marczewski, E. *Quelques remarques sur le principe d'abstraction.*

14. VI. 1949. Marczewski, E. *Les impressions du séjour à Prague et à Brno.*

21. VI. 1949. Łoś, J. *Sur l'additivité dénombrable de la mesure dans les corps de Boole.*

21. VI. 1949. Warmus, M. *Sur le calcul des champs à l'aide de réseaux composés des parallélogrammes.*

CHRONIQUE ET PUBLICATIONS

LES CONGRÈS DES MATHÉMATICIENS POLONAIS

Du 20 au 23 septembre 1948 a eu lieu à Varsovie le VI Congrès Polonais de Mathématique, lié avec le jubilé du professeur Wacław Sierpiński. Le compte rendu du Congrès va paraître comme supplément aux Annales de la Soc. Pol. de Math. Le compte rendu du jubilé complété de la liste des publications du prof. W. Sierpiński a paru comme supplément au volume 21 de ces Annales, dédié au prof. Wacław Sierpiński.

Le 23 septembre 1948 a eu lieu à Varsovie l'Assemblée Générale biennale de la Société. L'Assemblée Générale de la Société a élu le nouveau Bureau Central (voir p. 273).

Du 28 août au 3 septembre 1949 délibérait à Prague le VII Congrès Polonais de Mathématique en commun avec le III Congrès des Mathématiciens de Tchécoslovaquie. Ce double Congrès a réuni environ 120 participants, à savoir 50 mathématiciens polonais, 60 mathématiciens tchécoslovaques, 6 mathématiciens hongrois et 1 mathématicien français. On a prononcé 13 conférences plénières et plus de 110 communications au cours des séances des 5 sections. A savoir 16 communications au cours des séances de la section 1 (Fondements des Mathématiques), 12 communications — section 2 (Algèbre et Théorie des Nombres), 26 communications — section 3 (Analyse Mathématique), 29 communications — section 4 (Géomé-

trie), 26 communications — section 5 (Mathématiques Appliquées).

La Société des Mathématiciens Tchécoslovaques (Jednota Československých Matematiků a Fyzyků) s'est chargée de publier le compte rendu du Congrès.

LES CHANGEMENTS PERSONNELS AUX CHAIRES DES MATHÉMATIQUES DANS LES ÉCOLES SUPÉRIEURES POLONAISES

Dr Zygmunt Charzyński a été nommé suppléant de professeur des mathématiques à l'École Polytechnique de Łódź.

Doc. Dr Jacek Szarski a été nommé suppléant de professeur des mathématiques à l'Université de Cracovie.

HABILITATIONS

L'Académie des Mines à Cracovie. Dr Wlodzimierz Wrona. Dissertation: *O multiwektorach w przestrzeni Riemanna.* Ce travail a paru dans les Proceedings Koninklijke Nederladsche Akademie van Wetenschappen, 51 (Nr 10) (1948), sous le titre: *On multivectors in a* V_n — I and II.

Université de Marie Curie-Skłodowska à Lublin. Dr Adam Bielecki. Dissertation: *O pewnych warunkach koniecznych i dostatecznych jednotliwości układu całek równań różniczkowych i równań paratyngensowych (Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires et des équations au paratingent).* Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, vol. II, 2 (1948), Sectio A, p. 48—106.

THÈSES DE DOCTORAT

L'Université de Cracovie:

Zofia Szmydtówna. *O całkach pierwszych równań różniczkowych* (à paraître dans les Annales de la Soc. Pol. de Math. sous le titre: *Sur les intégrales premières de l'équation* $y' = f(x,y)$.

Roman Leitner. *Sur les transformations canoniques.* Académie Pol. des Sc. et des Let. Comptes Rendus Mensuels de la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Cracovie 1948, N 1—2.

L'Université de Lublin.

Czesław Ryll-Nardzewski. *Teoria dystrybucji w przestrzeni B_0 (La théorie de la distribution dans un espace du type B_0)* (à paraître dans les Studia Mathematica).

L'Université de Varsovie.

Roman Sikorski. *Nieskończenie addytywne ciała Boole'a.* Les résultats se trouvent dans les mémoires: *A theorem on extension of homomorphisms,* Annales de la Soc. Pol. de Math. 21 (1948), p. 332—335, *On the representation of Boolean algebras as fields of sets*, Fund. Math. 35 (1948), p. 247—256, *On the inducing of homomorphisms by mappings*, Fund. Math. 36 (1949), p. 7—22, *The integral on a Boolean algebra*, Coll. Math. 2 (1949), *On a generalization of theorems of Banach and Cantor-Bernstein,* Coll. Math. 1 (1948), p. 140—144.

L'Université de Wrocław.

Jerzy Łoś. *O matrycach logicznych (Sur les matrices logiques)*, (à paraître dans les Comptes Rendus de la Soc. des Sc. et des Lettres de Wrocław).

Maria Nosarzewska. *O zbieżności jednostajnej w pewnych klasach funkcji (Sur la convergence uniforme dans quelques classes des fonctions)* (à paraître dans les Fundamenta Mathematicae).

L'INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

Par l'ordonnance du Président du Conseil des Ministres du 4 décembre 1948 fut fondé l'Institut Mathématique de l'État (Państwowy Instytut Matematyczny) subordonné au Ministre de l'Instruction publique.

L'Institut Mathématique de l'État constitue une organisation centrale des recherches scientifiques dans le domaine des mathématiques et de leurs applications, conformément aux croissants besoins scientifiques et ceux de l'État.

La Direction de l'Institut compte 4 membres: Directeur en Chef M. K. Kuratowski, vice-Directeur M. S. Mazur, Secrétaire Général M. K. Borsuk, vice-Secrétaire Général M. H. Greniewski.

L'Institut contient trois Sections: Section Théorique, Section des Applications, sous la direction de M. H. Steinhaus et Section des Publications, sous la direction de M. B. Knaster.

La tâche principale de la Section Théorique est d'organiser les recherches dans le domaine des mathématiques pures. Cette section contient 8 groupes suivants:

1. *Fondements des mathématiques*, sous la direction de M. A. Mostowski.

2. *Topologie*, sous la direction de M. K. Borsuk.

3. *Analyse fonctionnelle*, sous la direction de M. S. Mazur.

4. *Fonctions réelles*, sous la direction de M. E. Marczewski.

5. *Fonctions analytiques*, sous la direction de M. F. Leja.

6. *Équations différentielles*, sous la direction de M. F. Ważewski.

7. *Géométrie différentielle*, sous la direction de M. S. Gołąb.

8. *Problemes mathématiques de la physique*, sous la direction de MM. W. Pogorzelski et W. Rubinowicz.

La tâche principale de la Section des Applications consiste en recherches dans le domaine des mathématiques appliquées, ainsi qu'en exécution des commandes concernant les applications pratiques des mathématiques aux besoins de l'économie réglée, statistique. production industrielle et agricole, assurance sociale, et défense nationale. La Section des Applications contient les groupes suivants:

1. *Général*, sous la direction de M. H. Steinhaus.

2. *Applications techniques*, sous la direction de M. J. G. Mikusiński.

3. *Appareils mathématiques*, sous la direction de M. H. Greniewski.

4. *Actuaire*, sous la direction de M. A. Grużewski.

5. *Géométrie appliquée*, sous la direction de M. E. Otto.

La tâche principale de la Section des Publications est l'organisation rationnelle de l'activité publicitaire dans le domaine des mathématiques.

L'Institut a pour siège Varsovie et son activité s'étend sur le territoire de la Pologne toute entière.

A Varsovie se trouvent la Direction de l'Institut, ainsi que les groupes suivants de la Section Théorique: le Groupe des Fondements des mathématiques, le Groupe de la Topologie, le Groupe de l'Analyse fonctionnelle, et celui des Problèmes mathématiques de la physique.

De la Section des Applications: Le Groupe des appareils, le Groupe actuaire, et celui de la Géométrie appliquée.

A Wrocław se trouvent: de la Section Théorique — le Groupe des fonctions réelles, de la Section des Applications — le Groupe Général et le Groupe des applications techniques et la Section des Publications toute entière.

A Cracovie se trouvent: le Groupe des Fonctions analytiques, le Groupe des Équations différentielles et celui de la Géométrie différentielle. Tous ces groupes appartiennent à la Section Théorique.

L'Institut Mathématique de l'État compte actuellement 28 membres, 31 assistants et adjoints, 7 fonctionnaires scientifico-techniques et 5 employés.

RELATIONS SCIENTIFIQUES ENTRE LES MATHÉMATICIENS POLONAIS ET ÉTRANGERS

Collaboration avec les mathématiciens tchécoslovaques

A la suite des conférences, qui ont eu lieu entre les mathématiciens polonais et tchécoslovaques un vaste programme d'une collaboration systématique a été fixé. Il s'agit en premier lieu de la collaboration entre l'Institut Mathématique de l'État polonais et l'Institut Mathématique de l'Académie des Sciences et des Arts à Prague.

Dans le cadre de cette collaboration on a decidé d'échanger systématiquement des professeurs et des boursiers entre la Pologne et la Tchécoslovaquie.

Désormais les Congrès des mathématiciens de deux pays seront convoqués en commun. Pour la première fois le VII Congrès des mathématiciens polonais et le III Congrès des Mathématiciens de Tchécoslovaquie ont eu lieu à Prague du 28 août jusqu'au 4 septembre 1949.

Convention bilatérale avec la Société American Mathematical Society

Une convention bilatérale, concernant l'admission des membres fut conclue entre la Société Polonaise de Mathématique et la Société American Mathematical Society. Conformément

à cette convention tout membre de la Société Pol. de Math. peut devenir membre de la Société Américaine de Math. et tout membre de la Société Américaine de Math. peut devenir membre de la Société Pol. de Math.

Les membres de la Soc. Pol. de Math. qui ont l'intention de devenir membres de la Société Américaine de Math. annoncent leur entrée par l'entremise du Bureau Central de la Soc. Pol. de Math.; ils paient une cotisation de 5 dollars par an, recevant gratuitement le Bulletin of the Amer. Math. Society et ont le droit d'obtenir le Mathematical Reviews, avec une remise de 50%, et toutes les autres publications de la Société Américaine de Math. avec une remise de 25%. (Transactions of the Amer. Math. Society, Colloquium Series, Mathematical Surveys, Semicentennial Publications).

Les membres de la Société Américaine de Math. qui sont devenus membres de la Soc. Pol. de Math. paient une cotisation de 3 dollars par an, recevant gratuitement les Annales de la Soc. Pol. de Math. et une réduction du prix des publications polonaises.

Mathématiciens Polonais à l'Étranger

Prof. Wacław Sierpiński, invité par l'Université de Lucknow (Indes) a donné 12 conférences à la Faculté des Sciences de cette Université en janvier et février du 1949.

En septembre 1949 M. W. Sierpiński a pris part à l'Assemblée générale du Conseil International des Unions Scientifiques qui a eu lieu à Copenhague, comme délégué de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres.

Prof. Bronislaw Knaster, invité par l'Université de Charles IV à Prague, y a donné deux conférences. Pendant son séjour à Prague à l'occasion du Congrès de Mathématique prof. B. Knaster a prononcé une conférence sur l'organisation des imprimeries scientifiques en Pologne.

Prof. Kazimierz Kuratowski, invité par le Institute for Advanced Study à Princeton, en caractère de membre pour le premier semestre de l'année 1948/49, et par la Société American Mathématical Society en caractère de visiting lecturer,

a prononcé, dans la période 14. XII. 1948 — 14. IV. 1949, 54 conférences dans les universités et institutions suivantes:

Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., Columbia Univ., New York; Swarthmore College, Philadelphia; Pensylvania Univ., Philadelphia; Rutgers College, New Brunswick; Harvard Univ., Cambridge, Mass; Brown Uniw., Providence; Yale Univ., New Haven; Princeton Univ.; Haverford College, Pa; Univ. of Syracuse; Cornell Univ., Ithaca, N. Y.; Univ. of Rochester, N. Y.; Ohio State Univ., Columbus; Michigan Univ., Ann Arbor; Univ. of Wisconsin, Madison; Univ. of Chicago; Univ. of Notre Dame, Ind.; Purdue Univ., Lafayette, Ind.; Univ. of Illinois, Urbana; Univ. of Iowa; Iowa State College, Ames; Univ. of Missouri, Columbia; Univ. of Kansas, Lawrence; Univ. of Nebraska, Lincoln; Univ. of Washington, Seattle; Reed College, Portland, Oregon; Univ. of California, Berkeley; Standford Univ., Palo Alto, Calif.; Univ. of California at Los Angeles; California Institute of Technology, Pasadena; Univ. of Texas, Austin; Tulane Univ., New Orleans; Univ. of Georgia, Athens; Univ. of Virginia, Charlottesville; Univ. of North Carolina, Chapel Hill; N. Carolina State College, Raleigh; Univ. of Tennessee, Knoxville.

Pendant son séjour à Prague à l'occasion du Congrès mathématique prof. K. Kuratowski a prononcé une conférence sur l'organisation des recherches mathématiques en Pologne.

Prof. Edward Marczewski, invité par l'Institut Mathématique de l'Académie des Sciences et des Arts à Prague, a prononcé au mois de mai 1949 des conférences sur la théorie de la mesure et l'algèbre de Boole. En outre il a eu des cours à l'Université de Charles IV à Prague.

Prof. Stanisław Mazur, invité à Bratislava, a prononcé une conférence sur l'organisation des études mathématiques en Pologne.

Prof. Andrzej Mostowski, invité par le Institute for Advanced Study à Princeton, en caractère de membre pour l'année académique 1948/49, a passé 6 mois aux États Unis et a donné pendant son séjour 12 conférences sur divers problèmes de la logique mathématique aux Universités de Princeton, Columbia (New York), Chicago, Madison, Seattle, Berkeley et Los Angeles.

Prof. Hugo Steinhaus, invité en semptembre 1949 par l'Université de Brno, a donné une conférence sur quelques problèmes des mathématiques appliquées (dendrométrie, notion de la longueur, stature, et poids des enfants).

Prof. Stefan Straszewicz, invité à Bratislava, a prononcé une conférence sur l'organisation des études techniques en Pologne.

Dr Roman Sikorski a séjourné à Zurich (juillet 1948 — septembre 1949) dans le but scientifique, en qualité de boursier du Gouvernement Polonais.

Mgr Krzysztof Tatarkiewicz a séjourné à Paris (mars 1948 — mars 1949) dans le but scientifique, en qualité de boursier du Gouvernement Français.

Mathématiciens Étrangers en Pologne

Prof. P. Alexandroff de Moscou a pris part au VI Congrès des Mathématiciens Polonais à Varsovie et au Jubilé du prof. W. Sierpiński (septembre 1948).

Prof. G. Alexits de Budapest a pris part au VI Congrès des Mathématiciens Polonais à Varsovie et au Jubilé du prof. W. Sierpiński (septembre 1948).

Prof. B. Bydżowski, recteur de l'Université de Charles IV à Prague a été promu le 24 septembre 1948 docteur *honoris causa* de l'Université de Varsovie. Pendant son séjour à Varsovie il a pris part au VI Congrès des Mathématiciens Polonais et au Jubilé de M. W. Sierpiński.

Prof. E. Čech de Prague a séjourné trois fois en Pologne (en septembre 1948, en janvier 1949, en mars 1949). Il a pris part au VI Congrès des Mathématiciens Polonais à Varsovie et au Jubilé du Prof. W. Sierpiński. En outre il a eu 4 conférences aux séances de la Société Pol. de Math. à Varsovie et à Wrocław et il a pris part à deux séances avec le Bureau Central de la Société Pol. de Math. au sujet de la collaboration scientifique entre les mathématiciens polonais et tchécoslovaques.

Prof. M. Fréchet de Paris a pris part au 75-anniversaire de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres.

Prof. V. Jarník de Prague a pris part au VI Congrès des Mathématiciens Polonais à Varsovie et au Jubilé du prof. W. Sierpiński (septembre 1948). En outre il a passé quelques jours à Wrocław, où il a fait une communication à la Section de Wrocław de la Société Pol. de Math. (28 septembre 1948).

Prof. A. Kolmogoroff de Moscou a pris part au VI Congrès des Mathématiciens Polonais à Varsovie et au Jubilé du prof. W. Sierpiński (septembre 1948).

Prof. V. Kořinek de Prague a pris part au VI Congrès des Mathématiciens Polonais à Varsovie et au Jubilé du prof. W. Sierpiński (septembre 1948).

Prof. K. Mardjalichevili de Moscou a pris part au VI Congrès des Mathématiciens Polonais à Varsovie et au Jubilé du Prof. W. Sierpiński (septembre 1948).

Prof. S. Stoïlow de Bucarest a pris part au VI Congrès des Mathématiciens Polonais à Varsovie et au Jubile du prof W. Sierpiński (septembre 1948).

Prof. F. Vyčichlo de Prague a visité Varsovie et Wrocław (en juin 1949); il a donné une conférence à la séance de la Société Pol. de Math. à Wrocław (10. VI. 1949).

PRIX ET DISTINCTIONS SCIENTIFIQUES

Prof. W. Sierpiński a été promu (le 27 novembre 1948) docteur *honoris causa* de l'Université et de l'École Polytechnique de Wrocław, et (le 28 janvier 1949) docteur *honorisc ausa* de l'Université de Lucknow (Indes).

La Société des Sciences et des Lettres de Varsovie a élu prof. S. Mazur membre actif.

L'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres à Cracovie a élu prof. T. Ważewski membre correspondant.

Parmi les lauréats des Prix de l'État accordés le 22 juillet 1949 pour les travaux dans le domaine des sciences, de la technique et de l'organisation du travail, se trouvent 4 mathématiciens, à savoir: Le prix du I dégré a été décerné à M. W. Sierpiński et les prix du II dégré aux MM.: K. Borsuk, K. Kuratowski et S. Mazur.

La Société des Sciences et des Lettres de Varsovie a accordé le prix scientifique annuel (pour l'an 1948) dans le domaine

des sciences mathématiques et physiques au prof. K. Kuratowski pour le livre Topologie I.

Les prix scientifiques annuels, fondés grâce à une subvention accordée par le Ministère de l'Instruction Publique pour les meilleurs travaux mathématiques publiés par les membres de la Société au cours de deux années précédantes ont été accordés pour la quatrième fois, le 24 juin 1949 à M. S. Mazur (le prix de Banach, pour le travail commun avec M. W. Orlicz) *Sur les espaces metriques lineaires* (I), Studia Math. 10 (1948), p. 184—208; à M. A. Mostowski (le prix de Mazurkiewicz, pour le travail *On definable sets of positive integrals*, Fund. Math. 34 (1947) p. 81—112) et à M. Z. Zahorski (le prix de Zaremba, pour le travail *Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les derivées de tous les ordres*, Fund. Math. 34 (1947), p. 183—245).

LIVRES ET PÉRIODIQUES PARUS

Annales de la Société Polonaise de Mathématique, vol. XXI, dédié à M. Wacław Sierpiński à l'occasion de son Jubilé. Fascicule I, Kraków 1948, Instytut Matematyczny U. J., p. 160, contient 20 notes de 19 auteurs et la photographie de M. W. Sierpiński.

Fascicule II, Kraków 1949, Instytut Matematyczny U. J., p. 161—360, contient 19 notes de 20 auteurs et les Comptes-rendus de la Société Polonaise de Mathématique pour la période 1. II. 1948 — 30. VI. 1948.

Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série A; Sciences Mathématiques. Année 1940—1946, Kraków 1948, p. 160. Parmi 12 articles contenus dans ce volume il y a 2 notes de deux auteurs concernant les mathématiques. Année 1949, Nº 1—4 A, p. 89. Parmi 11 articles contenus dans ce Nº il y a 3 notes de deux auteurs concernant les mathématiques.

Colloqium Mathematicum, vol. I, Fascicule 3 (Wrocław 1948, Gmach Politechniki, p. 193—272) contient 13 notes de 13 auteurs, une liste contenant 15 problèmes, comptes-rendus des séances de la Section de Wrocław de la Société Pol. de Math. et une chronique. Fascicule 4 (Wrocław 1949, Gmach Poli-

techniki, p. 273—358) contient 8 notes de 9 auteurs et une analyse de l'oeuvre scientifique de W. Nikliborc (avec une liste de ses publications) écrite par W. Ślebodziński. Ce Fascicule contient en outre une liste contenant 10 problèmes, les réponses à 4 problèmes posés dans les fascicules précédents, comptes rendus des séances de la Section de Wrocław de la Société Pol. de Math. et une chronique.

Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, vol. 40, 1948 (classe III), p. 122, Warszawa 1948, Imprimeur-Éditeur Towarzystwo Naukowe Warszawskie. Parmi les 16 articles que contient le volume, 10 notes de 6 auteurs sont consacrés aux mathématiques.

Fundamenta Mathematicae, vol. 35 (Warszawa 1948, Seminarium Matematyczne U. W., ul. Hoża 69, p. 304), contient 27 travaux de 19 auteurs.

Matematyka, l'année 1 (1948), fascicule 2 et l'année 2 (1949) fascicules 1, 2, 3, 4, Warszawa 1948 et 1949, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych (en polonais). Chaque fascicule compte 64 p. et contient une partie scientifique, une partie historique, une partie didactique, une chronique, des analyses, une bibliographie ainsi qu'une collection de problèmes.

Prace Matematyczno-Fizyczne, vol. XLVII, p. XII+141, Warszawa 1949, Imprimeur-Éditeur Towarzystwo Naukowe Warszawskie. Ce volume contient 10 travaux de 9 auteurs, ainsi qu'une biographie et l'analyse de l'oeuvre scientifique de S. Dickstein, écrite par M. A. Mostowski.

Studia Mathematica, vol. X (Wrocław 1948, p. 220), contient 17 travaux de 12 auteurs.

Jubileusz 40-lecia Działalności na Katedrze Uniwersyteckiej Profesora Wacława Sierpińskiego, p. 93, Édition du Comité du Jubilé, (comme supplément au vol. XXI des Annales de la Soc. Pol. de Math.), Warszawa 1949, sous la rédaction de M. K. Zarankiewicz. Contient le compte rendu du jubilé du professeur Wacław Sierpiński, sa biographie, l'analyse de son oeuvre scientifique écrite par M. E. Marczewski et la liste de ses travaux scientifiques, contenant 15 monographies et manuels et 512 travaux publiés dans les journaux scientifiques.

Krysicki Wl. et Wlodarski L. *Zadania z analizy matematycznej II. Rachunek całkowy. Równania różniczkowe*, p. 350 (litographié). Komisja Wydawnicza Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Łódzkiej, Łódź 1948.

Leja F. *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, p. IV+426. Édition II complétée. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1949.

Nikodym O. *Równania różniczkowe*, p. 198. Księgarnia Akademicka, Poznań 1949.

Pogorzelski, W. *Zarys Rachunku Prawdopodobieństwa i Teorii Błędów*, p. 96. Komisja Wydawnicza Tow. Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1948, Nr 11.

Pogorzelski, W. *Wyznaczniki i Równania Liniowe*, p. 61. Komisja Wydawnicza Tow. Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1948, Nr 40.

Turowicz O. S. B. *Teoria wyznaczników i macierzy*, p. XII+ +208 (litographié). Kółko Matematyczno-Fizyczne U. U. J., Kraków 1949.

ANALYSES

Kazimierz Kuratowski. *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego (Leçons sur le calcul différentiel et intégral)*. Część I. Funkcje jednej zmiennej. Monografie Matematyczne, t. XV, Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik", Warszawa 1948, p. 231.

Voici le contenu de cet ouvrage: I. *Suites et séries.* Introduction, suites infinies, séries infinies. II. *Fonctions.* Fonctions et leurs limites, fonctions continues, suites et séries de fonctions. III. *Calcul différentiel d'une variable.* Dérivées du 1er ordre, dérivées d'ordre supérieur. IV. *Calcul intégral d'une variable.* Intégrales indéfinies, intégrales définies, intégrales généralisées et leurs relations avec les séries infinies.

Dans cette première partie d'un cours du calcul différentiel et du calcul intégral destiné aux étudiants de la 1ère année M. Kuratowski traite des fonctions d'une seule variable. La deuxième partie (qui doit paraître prochainement) sera consacrée aux fonctions de plusieurs variables. Il y a lieu de remarquer que dans la presque totalité des manuels d'analyse la première partie du cours est consacrée au calcul différentiel et la deuxième au calcul intégral. La division du programme adoptée par M. Kuratowski me parait cependant plus convenable au point de vue pédagogique, elle est d'ailleurs conforme au nouveau programme des études aux Facultés des Sciences en Pologne, programme adopté récemment par le Conseil

Supérieur des Hautes Études (Rada Główna Szkół Wyższych). En général le livre de M. Kuratowski contient presque tout le programme de la première partie d'analyse élaboré par ledit Conseil.

La théorie des nombres réels n'est qu'esquissée au début du livre, mais dans la suite de l'ouvrage tous les énoncés sont pourvus des démonstrations détaillées, qualité particulièrement précieuse, car il est parfois bien difficile à un jeune étudiant de reconstruire une démonstration trop concise. Les démonstrations sont exposées d'une façon intéressante et dans un style parfait, souvent elles sont mêmes particulièrement élégantes, en se bornant à un seul exemple on peut citer une démonstration remarquable de la formule de Taylor. Les astérisques marquant les passages que l'on peut omettre sans inconvénient dans une première lecture, facilitent l'étude de l'ouvrage.

Le livre contient un très grand nombre d'exemples et plus d'une certaine d'exercices importants, les exercices plus difficiles sont accompagnés d'indications destinées à faciliter leurs résolutions, Il contient aussi des sujets qui intéressent particulièrement les physiciens comme les séries de Fourier, la formule de Stirling, la fonction gamma etc. On y trouve enfin quelques sujets omis dans la plupart des cours du calcul infinitésimal, par exemple les critères de convergence des séries numériques de Kummer et d'Abel, le célèbre théorème sur les séries de puissances de ce dernier auteur, la deuxième formule de la moyenne du calcul intégral avec une belle application à l'intégrale de Dirichlet, le calcul numérique de l'intégrale de probabilité (de Poisson) et de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, la décomposition de $\sin x$ en produit de facteurs simples. Par contre l'auteur a heureusement supprimé certains sujets qui alourdiraient inutilement le texte, c'est ainsi qu'il n'expose la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples que sur quelques exemples.

Le cours de M. Kuratowski contient plusieurs idées didactiques nouvelles. Ainsi l'auteur modifie en les simplifiant la définition de la coupure de Dedekind et le critère nécessaire et suffisant de la convergence des suites de Cauchy. L'introduction des fonctions „linéaires dans les intervalles" (il résulte de leur définition et de l'univocité qu'elles sont continues, il serait peut-être indiqué de le dire explicitement) permet de démontrer bien simplement le théorème d'après lequel toute fonction continue est la dérivée d'une autre fonction.

En résumé le livre de M. Kuratowski doit être chaleureusement recommandé à tous ceux qui étudient soit les mathématiques soit leurs applications.

M. Biernacki

Franciszek Leja. *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych (Calcul différentiel et intégral avec une introduction aux équations différentielles)*, deuxième édition

augmentée, 1949, IV + 426, 121 fig., Warszawa, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

En relation avec la réforme des études aux facultés des sciences, qui vient d'être accomplie en Pologne, le besoin de bons et accessibles manuels conformes aux nouvelles exigences se manifeste. Le calcul différentiel et intégral de F. Leja dont l'édition précédente se trouvait épuisée aussitôt après l'apparition, satisfait bien à ces conditions. L'ouvrage en question contient à peu près tout ce que renferme le nouveau programme de la première partie du cours d'analyse mathématique et on peut aussi prévoir que cet ouvrage sera encore conforme au programme de la seconde partie du cours.

Le livre est écrit d'une manière très concise et parfois même trop serrée, en particulier pour le lecteur peu habile. Cependant, c'est justement l'économie des mots et la brièveté des définitions et des démonstrations qui rendent l'ouvrage plus accessible et permettent d'exposer dans un petit nombre de pages un très grand nombre de faits. L'exposition rigoureuse, élégante et claire ne suppose, pour être comprise, que très peu de connaissances mathématiques. L'auteur s'est gardé de surcharger le lecteur. C'est pourquoi les démonstrations de certains théorèmes énoncés dans les premiers chapitres ne sont exposées que beaucoup plus tard. Les notions plus délicates sont introduites avec précaution. Les difficultés augmentent graduellement. Les nombreux exemples, les applications géométriques et physiques intéressantes et plus de deux cents exercices pourvus de solutions facilitent l'étude du livre. On pourrait cependant regretter que l'auteur a supprimé quelques démonstrations importantes. Le cours contient des théorèmes et des notions qui ne sont pas d'habitude exposés dans des ouvrages de ce genre. On y trouve par exemple les éléments de la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesque, l'intégrale de Stieltjes, le théorème de Fejér concernant des séries trigonométriques et même une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de polynômes homogènes de deux variables possède un domaine de convergence. Il contient aussi beaucoup de détails importants pour ceux qui étudient la physique, la chimie et les sciences techniques.

Adam Bielecki

Andrzej Mostowski. *Logika Matematyczna* (Mathematical Logic), kurs uniwersytecki. Monografie Matematyczne t. XVIII, Warszawa 1948, p. VIII + 388.

This manual includes an outline of the following subjects: propositional calculus, quantifier calculus, algebra of sets and relations, theory of identity, theory of relations, theory of natural numbers, theory of logical types and metamathematics (with examples of foundations of formalized systems).

A large number of didactic merits of this book is to be emphasized. The author in a very fortunate way succeeded to reconcile the clarity

of exposition with a concise treatment of a very comprehensive material. Authors of manuals on the foundations of mathematics are not always free from what might be called a „sectarian spirit", that is, they are fond of enlarging upon that method of eliminating antinomies pertaining to the notion of the set, which particularly suits them, leaving in shade or even passing over in silence other methods. This cannot be said of Professor Mostowski. Clear and impartial review of various theories of logical types and equally clear formulation of the axiomatically constructed theory of sets give the book a markedly non-sectarian character. The manual has in view above all the students of mathematics and so the author frequently and in a clever way shows the application of logical notions to various fields of mathematics. Undoubtedly one of the major obstacles in the study of mathematical logic and foundations of mathematics in general may be a difficult symbolism. The case of Frege who expressed a genial content in so difficult a symbolism that it incommodes not only university students but even specialists, will probably remain a warning for ever. Professor Mostowski, retaining in his symbolism the simplicity of Boole and of Schröder and rather avoiding, in the field of symbolism, the influences of Peano and Russel, in the best possible way makes the difficult course of study easier. Fortunate didactic ideas are: the geometrical (graphical) interpretation of certain statements on relations as well as an original, yet concise, exposition of Aristotelean syllogistic system by means of notions taken from the theory of relations. A further undoubtful merit of the manual are historical remarks on the development of certain notions (e. g., the footnote on the logic of the Stoics on p. 21, or the footnote on the development of the notion of function on p. 147). The student should be given in the manual the contemporary, and not an obsolete, state of science, yet he also should be prevetend from falling a victim of an erroneous and noxious suggestion of immutability or eternity of science. It seems that short historical remarks in the book under discussion are just an efficient protection against this danger.

Like every human work, Professor Mostowski's manual is not free from certain imperfections which to point out in turn is the unpleasant duty of the reviewer. The little „Mathematical Logic" is too modest and to narrow, in the next edition it ought to be „Mathematical Logic and Outline of Metamathematics" or perhaps even „An Outline of the Foundations of Mathematics". The conciseness of the book is its great merit, but it is to be feared that the author went too far in that respect. A slight enlargement of the manual should not discourage the reader, and it would enable him better acquaintance with certain problems. It is above all the propositional calculus, the geometrical interpretation of the theory of relations, and certain problems of the syntax that require a more comprehensive treatment. As far as the propositional calculus is concerned more tautologies should be given (their present number seems too scanty), and the axiomatic constructions and the multi-valued systems of logic should be discussed in more detailed way. Geometrical (graphical) inter-

pretation should, in view of its exceptional didactic value, be used in the exposition of algebra and of the theory of relations not occasionally (cf. p. 87) but extensively and systematically.

Of the more particular reservations I should like to mention the following problems. In Chapter I, Par. 1, the author speaks about deduction without having previously had said a word about definitioning, which from the didactic point of view does not seems quite fortunate. In my opinion didactically more advisable would be a consistently parallel treatment of the two parallel processes: definitioning and deduction, i. e., the process of building a language and the process of building the theory expressed in that language. Also in Chapter I, introduction of the notion of propositional function without a parallel introduction of the notion of nominal function (name-function) does not appear particularly fortunate.

Summarising, a new slightly enlarged edition in a language recognized in mathematical circles as international seems highly advisable, since even considering the above-mentioned reservations Professor Mostowski's manual appears unrivalled, and that on an international scale.

Henryk Greniewski

Table des matières du t. XXII

Les publications de la Société Polonaise de Mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de »*Rozprawy Polskiego Towarzystwa Matematycznego*« en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922, l'organe de la Société porte le titre d'**Annales de la Société Polonaise de Mathématique**; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément *(Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego)*, le corps du volume étant réservé aux travaux rédigés en d'autres langues.

Les tomes I—XXII contiennent 264 mémoires et notes des 105 auteurs suivants:

Abramowicz K., Alexiewicz A., Auerbach H., Bielecki A., Biernacki M., Bilimowitch A., Borel E., Borsuk K., Bouligand G., Butlewski Z., Cartan E., Chwistek L., Cotton F., Delsarte J., Denjoy A., Durañona y Vedia A., Eilenberg S., Flamant P., Fréchet M., Gambier B., Garcia G., Ghizzetti A., Giraud G., Glass S., Godeaux L., Gołąb S., Górski J., Hadamard J., Hartman S., Herzberg J., Hildebrandt T., Hlavatý V., Hoborski A., Janet M., Jarník V., Jaśkowski S., Katětov M., Kawaguchi A., Kempisty S., Kobrzyński Z., Kołodziejczyk S., Korevaar J., Kozakiewicz W., Krzyżański M., Kuratowski C., Labrousse A., Lainé E., Lebesgue H., Leja F., Lichtenstein L., Litwiniszyn J., Łojasiewicz S., Marcinkiewicz J., Marchaud A., Marczewski E., Mazurkiewicz S., Menger K., Mikusiński J., Montel P., Morse M., Mostowski A., Nikliborc W., Nikodym O., Novák J., Orlicz W., Perausówna I., Piccard S., Picone M., Popovici C., Rosenblatt A., Le Roux J., Rudnicki J., Ruziewicz S., Sakellariou N., Saks S., Severi F., Sieczka F., Sierpiński W., Sikortki R., Ślebodziński W., Stamm E., Stone M., Stożek W., Straszewicz S., Szarski J., Szmydtówna Z., Taussky O., Todd J., Tonolo A., Trjitzinsky W. J., Tsortsis A., Turowicz A., Turski S., Urbański W., Vasseur M., Vera F., Vitali G., Wajnsztejn D., Ważewski T., Weyssenhoff J., Whitehead J. H. C., Whyburn G. T., Wilkosz W., Zahorski Z., Zaremba S., Zaremba S. K., Zygmund A.

Le prix de ces Annales par un tome est 5 dollars USA pour l'étranger. Les tomes separés et la collection des tomes II—XIX est en vente à l'adresse:

Administration des Annales de la Soc. Polonaise de Mathématique
Kraków (Pologne), ul. św. Jana 22.